



UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

Proiect cofinanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Capital Uman 2014-2020

Axa prioritară 6: *Educație și competențe*

Prioritatea de investiții 10.i: *Reducerea și prevenirea abandonului școlar timpuriu și promovarea accesului egal la învățământul preșcolar, primar și secundar de calitate, inclusiv la parcursuri de învățare formale, nonformale și informale pentru reintegrarea în educație și formare*

Obiectivul specific 6.4: *Creșterea numărului de tineri care au abandonat școala și de adulți care nu și-au finalizat educația obligatorie care se reîntorc în sistemul de educație și formare, inclusiv prin programe de tip a doua șansă și programe de formare profesională*

Obiectivul specific 6.6: *Îmbunătățirea competențelor personalului didactic din învățământul preuniversitar în vederea promovării unor servicii educaționale de calitate orientate pe nevoile elevilor și a unei școli inclusive*

Titlu proiect: *"Acces la programe de educație și formare profesională pentru tinerii și adulții din județul Dolj care au părăsit timpuriu școala (I)"*

Cod SMIS 2014+: 135711

MATERIALE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE MATEMATICĂ

Modulul M2

Program „A doua șansă” pentru învățământ secundar inferior versiune finală

A.3.1 Organizarea, monitorizarea și evaluarea programului „A doua șansă” și a stagiilor de pregătire practică de 720 de ore

POPESCU LUMINIȚA VIORICA CRISTINA
Expert curriculum (Matematică)





Iulie 2023

Conținutul acestui material nu reprezintă în mod obligatoriu poziția oficială a Uniunii Europene sau a Guvernului României

ELEMENTE GEOMETRICE FUNDAMENTALE



La finalul unității de învățare, elevul va fi capabil:

-  să identifice elementele geometrice fundamentale într-un desen;
-  să utilizeze corect convențiile de desen;
-  să stabilească poziția elementelor geometrice în desen: paralelism, concurență, perpendicularitate, congruențe;
-  să compare segmente și unghiuri.

Punctul, dreapta, planul: recunoaștere, reprezentare prin desen, identificarea elementelor

Elementele de bază ale geometriei sunt: punctul, dreapta și planul.

Punctul este considerat o entitate abstractă, care **nu** are dimensiune, dar are o poziție în spațiu. Putem considera punctul urma lăsată de vârful ascuțit al unui creion pe hârtie.

- ✓ Punctele sunt reprezentate de obicei ca mici buline sau reprezentări sau cu „x”.
- ✓ Punctele se notează cu litere mari de tipar.
- ✓ Punctele situate în același loc se numesc puncte egale.
- ✓ Punctele situate în locuri diferite se numesc puncte distincte sau diferite.



Desenăm

●^A




×^B

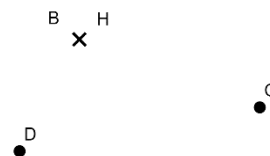
Citim

punctul A

punctul B

Exemple:

-  Punctele B și H sunt egale;
-  Punctele C și D sunt distincte;
-  Punctele B și H sunt distincte.






Dreapta este un set infinit de puncte aliniate într-o anumită direcție, ca un fir de ață foarte bine întins.

Dreapta:










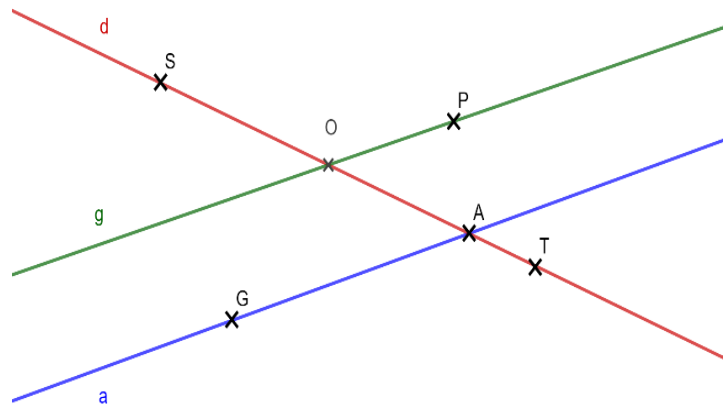
- ✓ nu are lățime sau grosime și se întinde în ambele direcții la infinit.
- ✓ se desenează cu ajutorul riglei
- ✓ se notează cu litere mici, de exemplu dreapta d , dreapta a sau punând în evidență două puncte distincte situate pe aceasta, de exemplu dreapta AB .



<i>Desenăm</i>	<i>Citim</i>
d 	<i>dreapta d</i>
a 	<i>dreapta a</i>
	<i>dreapta AB</i>




Exemple:

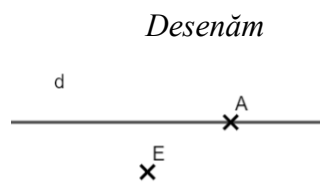
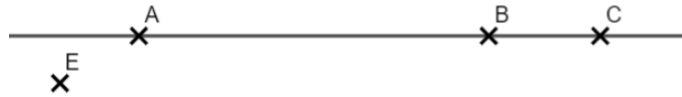
-  Cu roșu am desenat dreapta d .
-  Dreapta roșie este dreapta ST .
-  Dreapta roșie este dreapta SA .
-  Dreapta verde este dreapta OP .
-  Dreapta g este desenată cu verde.
-  Dreapta a este desenată cu albastru.
-  Dreapta albastră este dreapta AG .



- ✓ **Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.**
- ✓ Trei sau mai multe puncte se numesc **coliniare** dacă există o dreaptă care să le conțină.
- ✓ Trei sau mai multe puncte se numesc **necoliniare** dacă nu există o dreaptă care să le conțină.

Exemple:

-  Punctele A, B, C sunt coliniare.
-  Punctele A, B, E sunt necoliniare.
-  Punctele B, C, E sunt necoliniare.



Citim

Punctul A aparține dreptei d

Punctul E nu aparține dreptei d

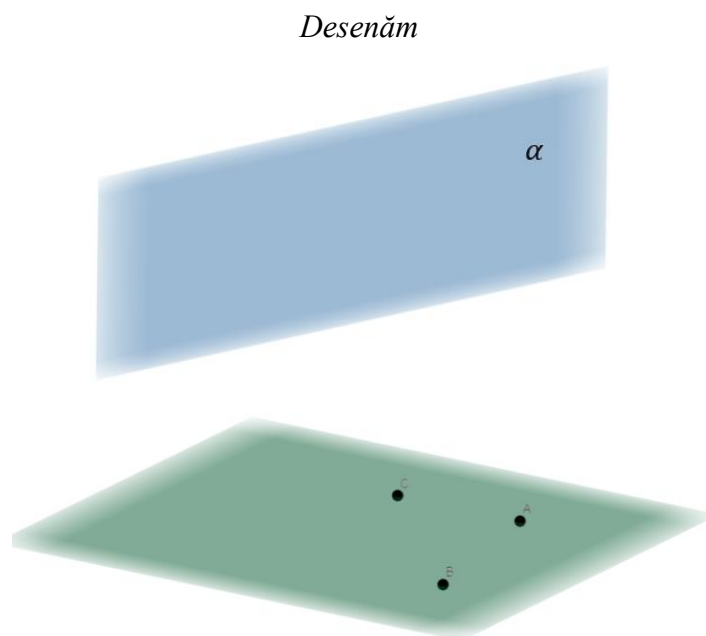
Scriem

$A \in d$

$E \notin d$

Planul este o suprafață netedă care se întinde înfinit în toate direcțiile.

Un plan se notează cu litere mici din alfabetul grecesc, de exemplu planul α –alpha, planul π –pi sau punând în evidență trei puncte necoliniare situate în aceasta, de exemplu planul (ABC) .



Citim

planul α

planul (ABC)

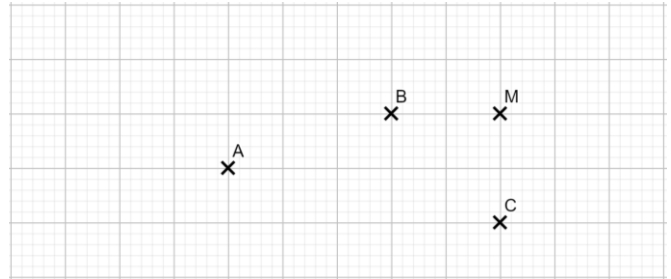


Să exersăm!

(Nu uita! Avem nevoie de riglă, creion negru și creioane colorate.)

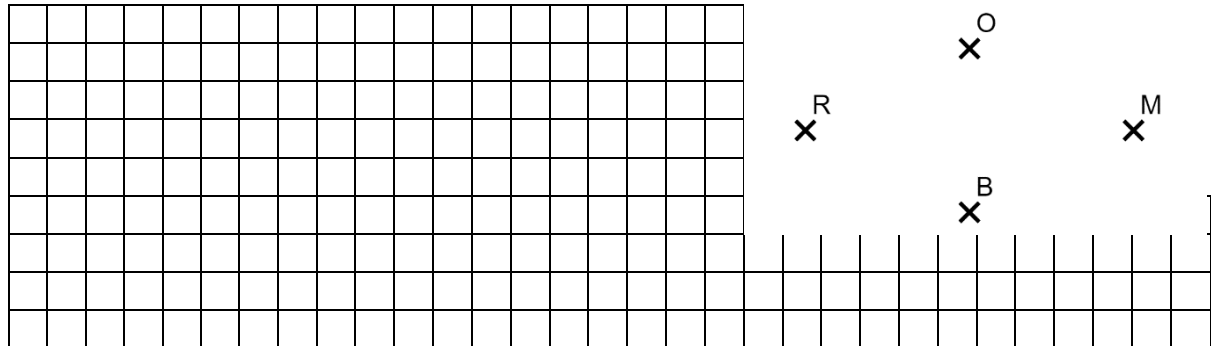
1. Completează desenul următor astfel:

- a) desenează cu verde dreapta AB ;
- b) desenează cu albastru dreapta AC ;
- c) desenează cu gri dreapta BM ;
- d) desenează cu roșu dreapta MC ;
- e) desenează cu albastru trei puncte P, Q, R diferite pe dreapta MC ;
- e) desenează punctul O situat pe dreapta AB și pe dreapta MC ;
- f) desenează un punct F situat pe dreapta AC , dar nu și pe dreapta BM .

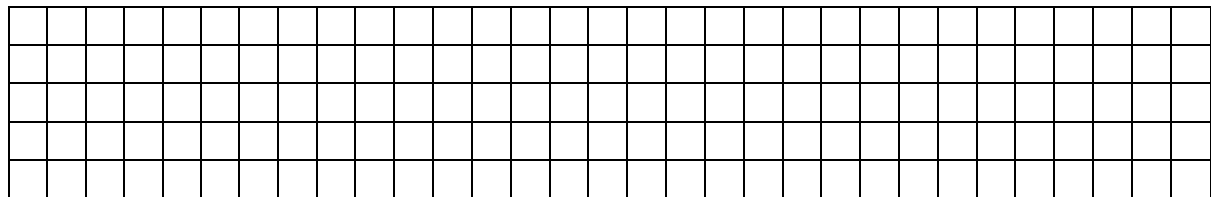


2. Desenează toate dreptele pe care le determină punctele R, O, M, B din figura alăturată.

a) Scrie dreptele pe care le-ai desenat.

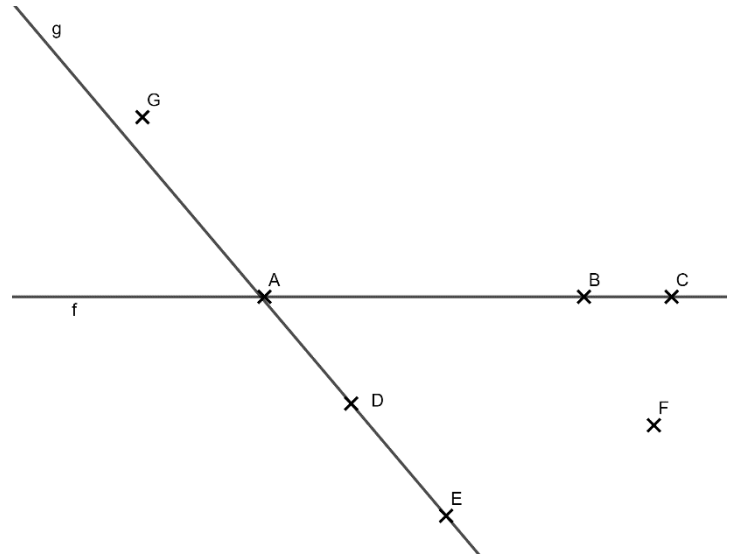


b) Câte dreptele ai găsit?

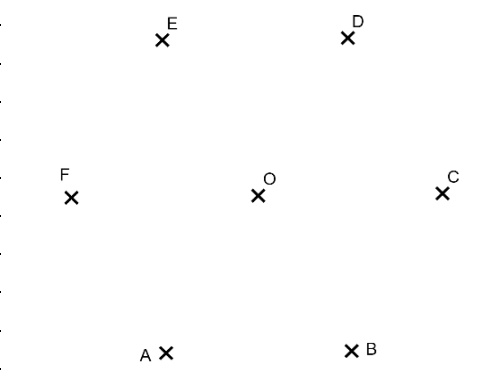


3. Privește desenul alăturat și stabilește valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- a) punctele A,B, C sunt coliniare A F
- b) punctele A, D, F sunt coliniare A F
- c) $A \in BD$ A F
- d) $C \notin AE$ A F
- e) $F \in AC$ A F
- g) $G \in AE$ A F
- h) punctele A, G, B sunt necoliniare A F
- i) $D \notin AE$ A F
- j) $F \notin BC$ A F
- k) $A \notin BC$ A F



4. Scrie cât mai multe triplete de puncte coliniare din desenul alăturat:

	
--	--


5. Desenează cinci puncte dintre care exact trei sunt coliniare. Câte drepte diferite poți construi cu aceste puncte?

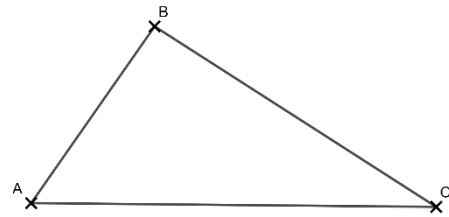
--	--


Configurații geometrice formate din puncte și linii. Pozițiile relative a două drepte

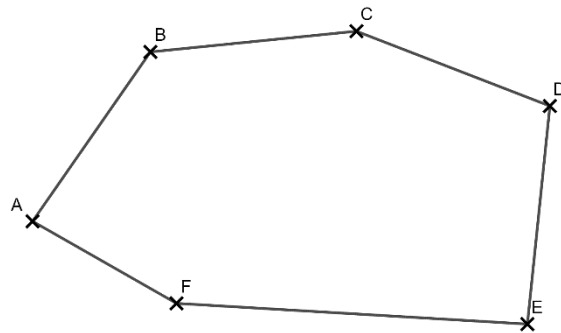
O configurație geometrică este o aranjare a punctelor și liniilor într-un spațiu geometric.

Exemple:

 *Triunghiul:* Este configurația geometrică formată prin unirea a trei puncte care nu se află pe aceeași dreaptă.

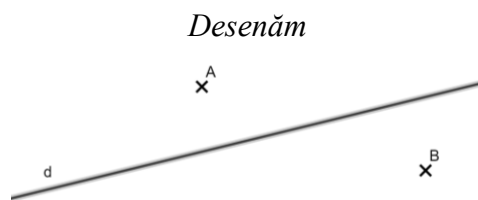


 *Hexagonul:* Este configurația geometrică formată prin unirea a șase puncte, oricare trei nu sunt coliniare.



Dacă într-un plan se dau o dreaptă d și două puncte distincte A și B nesituate pe ea în funcție de poziția punctelor față de dreaptă sunt posibile două configurații:

- ✓ Punctele A și B sunt de o parte și de alta a dreptei d .
- ✓ Punctele A și B sunt de aceeași parte a dreptei d .

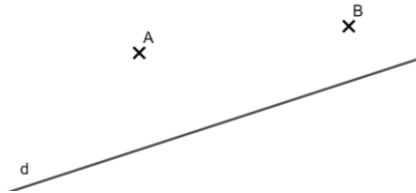


Citim

Punctele A și C sunt de o parte și de alta a dreptei d .
sau
Dreapta d separă punctele A și C .



Desenăm



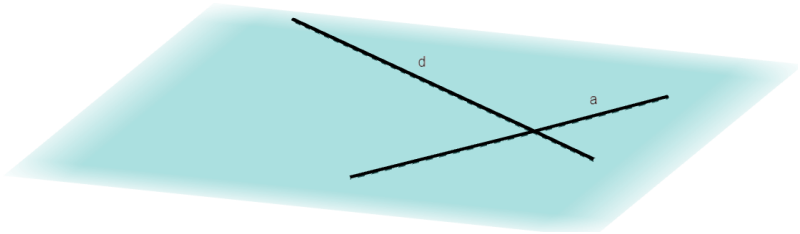
Citim

*Punctele A și B sunt de aceeași parte a dreptei d.
sau
Dreapta d nu separă punctele A și B.*

Pozițiile relative a două drepte



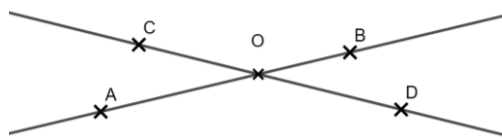
- ✓ Două drepte sunt coplanare dacă există un plan care să le conțină.



- ✓ Două drepte care au un singur punct comun se numesc drepte concurente.



Desenăm



Citim

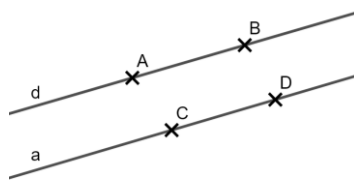
Dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O.

Punctul O este punctul de intersecție al dreptelor AB și CD.

- ✓ Două drepte situate în același plan care nu au puncte comune se numesc drepte paralele.



Desenăm



Citim

Dreptele AB și CD sunt paralele.

Dreptele a și d sunt paralele.

Scriem

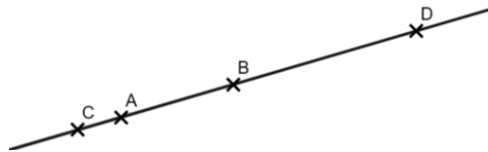
AB || CD

a || d

- ✓ Două drepte care au cel puțin două puncte distincte comune se numesc drepte identice.



Desenăm

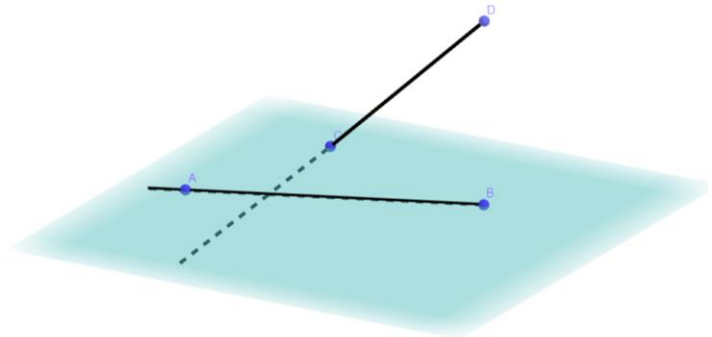


Citim

Dreptele AB și CD coincid $AB = CD$

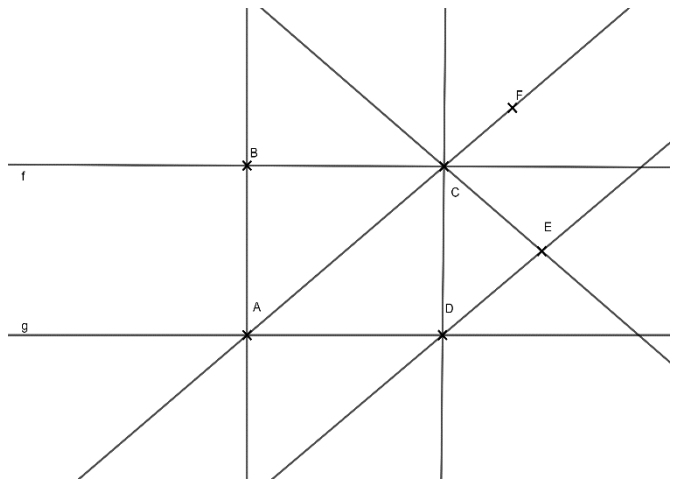
Scriem

- ✓ Două drepte pentru care nu există un plan care să le conțină se numesc drepte necoplanare.



Exemple:

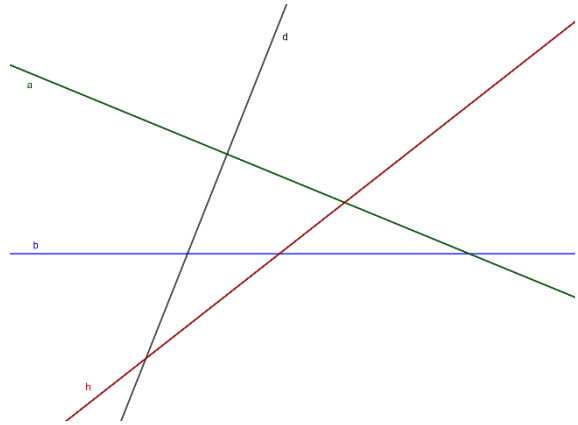
- dreptele g și AD sunt egale;
- dreptele BC și AD sunt paralele;
- dreptele AB și CD sunt paralele;
- dreptele AF și DE sunt paralele;
- dreptele BC și DE sunt concurente;
- dreptele AB și CE sunt concurente;
- dreptele CF și AD sunt concurente;
- dreptele BC și CD sunt concurente în punctul C ;
- punctele B și D sunt de aceeași parte a dreptei CE ;
- punctele E și D sunt de aceeași parte a dreptei AC ;
- punctele D și F sunt de o parte și de alta a dreptei CE ;
- punctele B și E sunt de o parte și de alta a dreptei CD .



Să exersăm!

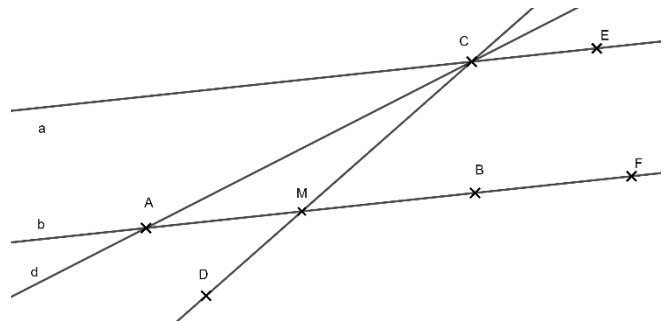
1. Completează desenul pentru ca următoarele afirmații să fie adevărate:

- Punctul A este punctul de intersecție al dreptelor a și b .
- Punctul B este punctul de intersecție al dreptelor d și b .
- Punctul C este punctul de intersecție al dreptelor d și a .
- Punctul D este punctul de intersecție al dreptelor a și h .
- Punctul E este punctul de intersecție al dreptelor h și b .
- Punctul F este punctul de intersecție al dreptelor d și h .



2. În figura alăturată dreptele a și b nu au niciun punct comun. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

- $AB \parallel CE$ A F
- $M \in BF$ A F
- $b \parallel d$ A F
- $B \in AC$ A F
- $C \in d$ A F
- $F \in AB$ A F
- dreptele b și d sunt concurente în O A F
- dreptele AB și CD sunt concurente în M A F
- dreptele AC și BF sunt concurente în M A F

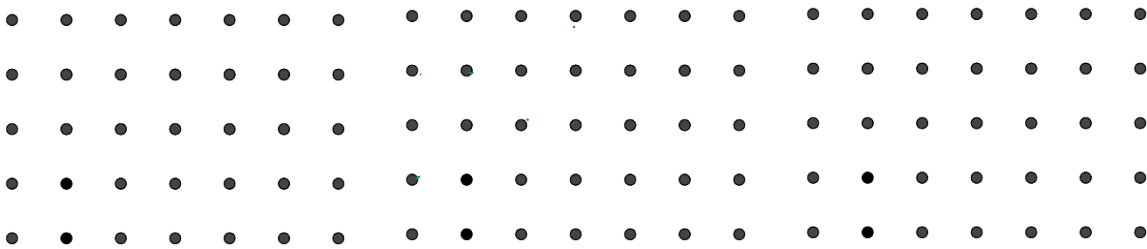


3. Unind puncte desenează o floare cu

a) 3 petale

b) 4 petale

c) 5 petale



4. Completează desenul următor pentru a obține propoziții adevărate:

a) dreapta $CD \parallel AB$;

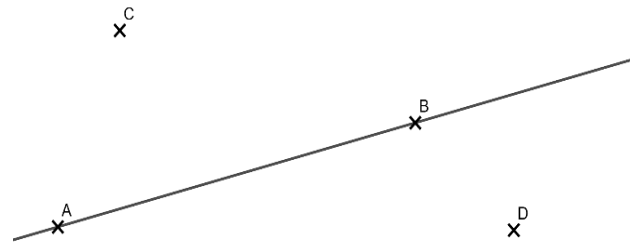
b) dreptele AB și CD sunt concurente în O ;

c) dreptele AD și BC sunt concurente în M ;

d) dreptele MO și CA sunt concurente în P ;

e) dreptele BD și AC sunt concurente în T ;

e) dreptele TO și AD sunt concurente în N .



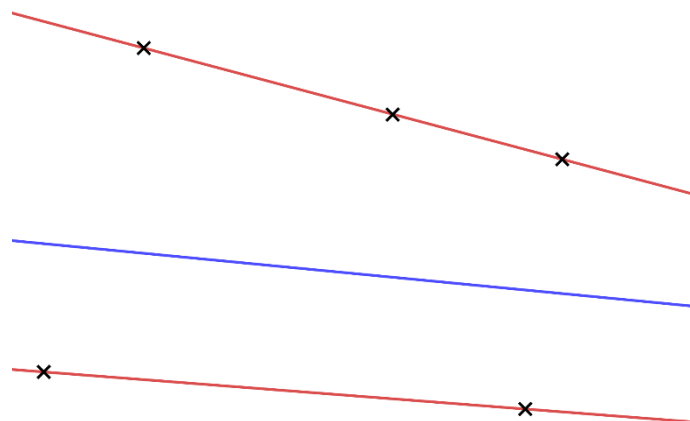
5. Punctele din figură reprezintă casele a cinci prieteni: Alin, Bogdan, Cristi, Dan și Emil; linia albastră reprezintă Jiul iar dreptele roșii cele două străzi pe care stau. Stabiliți care este casa fiecărui băiat dacă următoarele afirmații sunt adevărate:

a) Alin și Dan stau pe același mal al Jiului;

b) Emil și Bogdan stau de maluri diferite ale râului;

c) Cristi și Dan nu stau pe același mal al Jiului;

d) Emil și Cristi nu stau pe aceeași stradă;



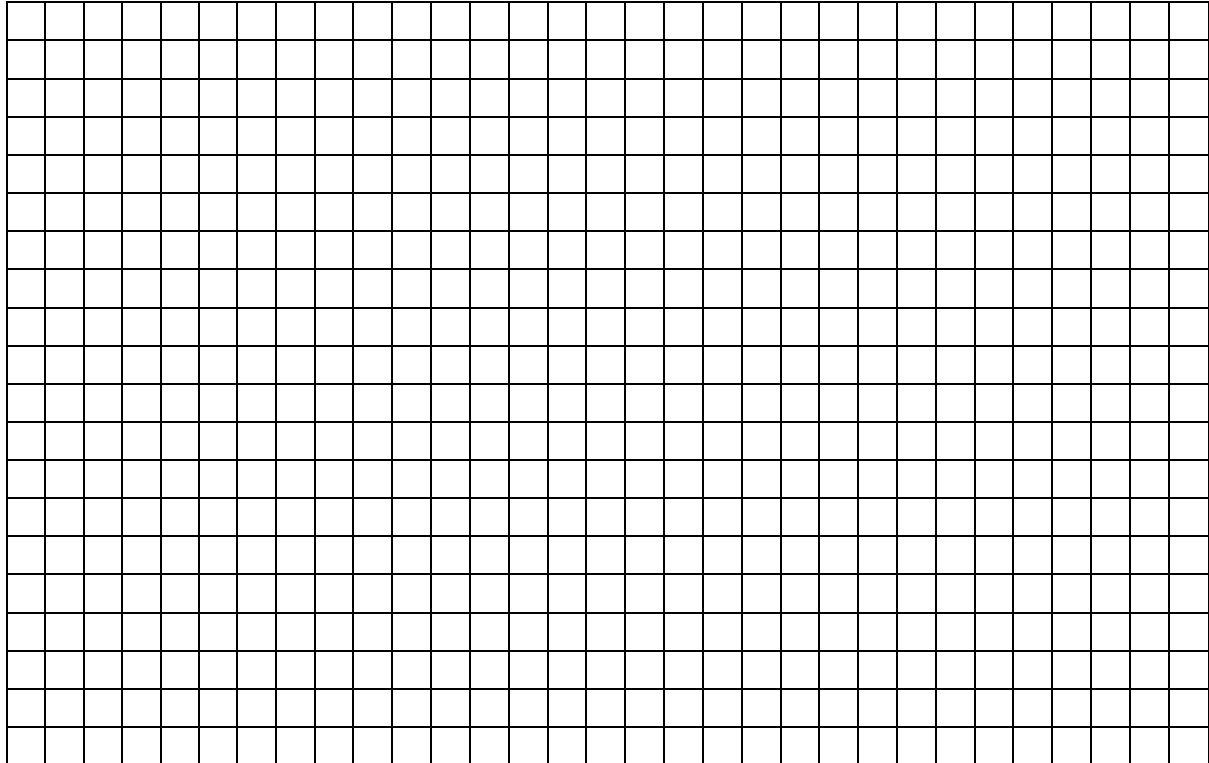


UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

- e) Alin, Emil și Cristi stau de aceeași parte a dreptei determinate de casele lui Dan și Bogdan;
- f) Dan și Emil stau de o parte și de alta a dreptei determinate de casele lui Alin și Bogdan.

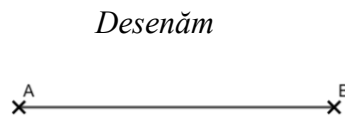


Determinarea distanței dintre două puncte și a lungimii unui segment (cu ajutorul măsurătorilor).

Segmentul de dreaptă reprezintă mulțimea punctelor unei drepte situate între două puncte distincte de pe acea dreaptă.



- ✓ Punctele A și B se numesc extremitățile segmentului (capetele segmentului).
- ✓ Cu roșu este desenat segmentul AB .
- ✓ Cu albastru este desenată dreapta AB .




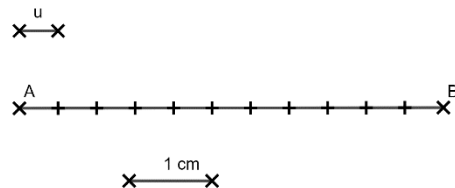
Citim Notăm
segmentul AB AB


Lungimea unui segment este valoarea măsurată a segmentului cu ajutorul segmentului unitate, ales ca etalon.

Distanța dintre două puncte este lungimea segmentului cu extremitățile în cele două puncte. Prin convenție distanța dintre două puncte egale este 0.

Exemple:

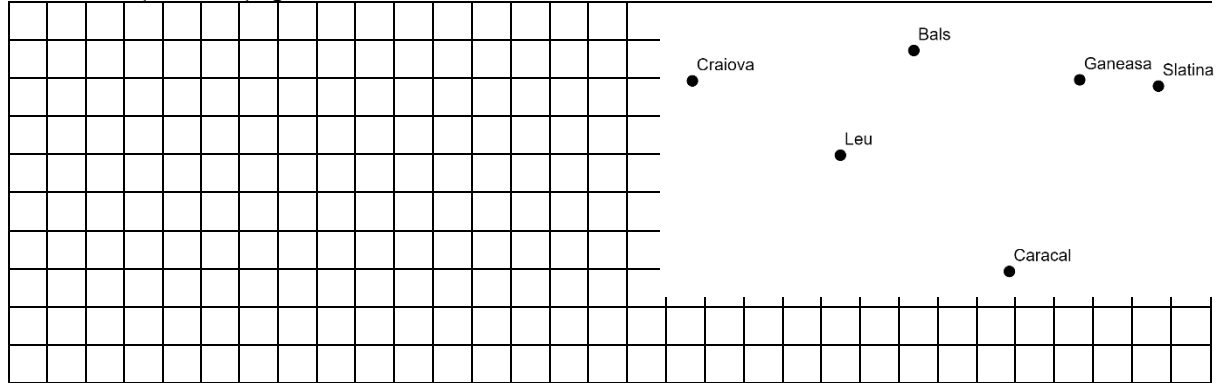
-  Lungimea segmentului AB este $11u$. Distanța dintre punctele A și B este de $11u$.



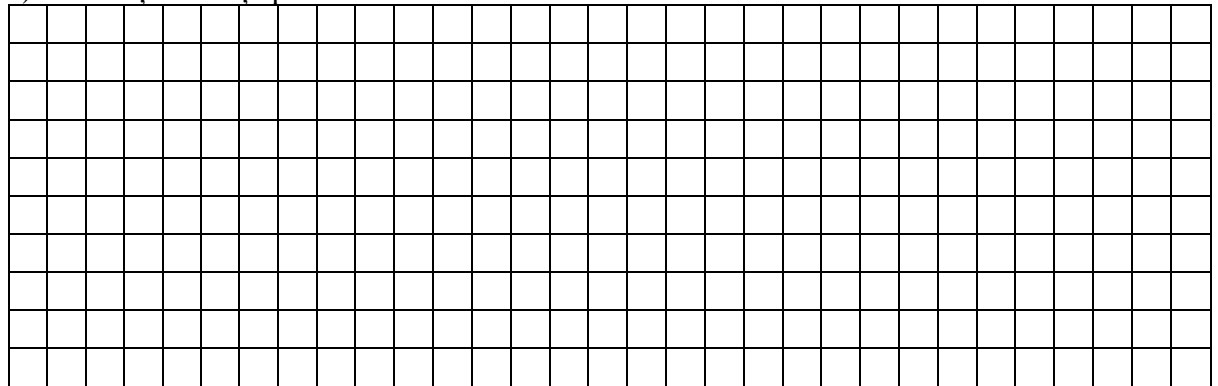
-  Lungimea segmentului PM este 3 cm . Distanța dintre punctele P și M este de 3 cm .



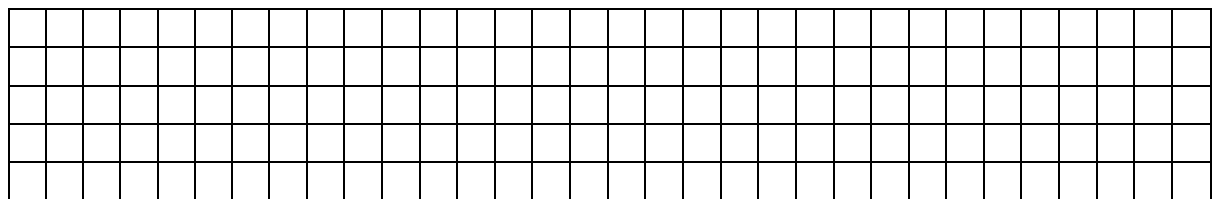
b) Calculați distanța parcursă Ionel la dus.



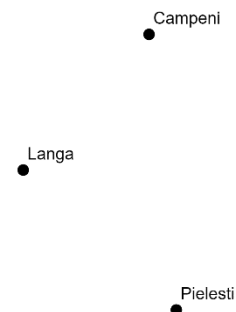
c) Calculați distanța parcursă Ionel la întoarcere.



d) Calculați ce distanță a parcurs în acea zi Ionel.



5. Comuna Pielești din județul Dolj este formată din 3 sate: Pielești, Câmpeni și Lânga. Distanța Pielești- Lânga este de 4 km, distanța Pielești-Câmpeni este de 9 km, iar distanța Lânga-Câmpeni este de 6 km. Microbuzul școlii care are 20 de locuri aduce zilnic din Lânga 7 elevi la Pielești, iar de la Câmpeni 30 de elevi.



Autobuzul face doar două curse: una Pielești-Câmpeni și retur și una Pielești- Lânga- Câmpeni- Pielești.

- Trasează cele două trasee pe care le face zilnic microbuzul școlar.
- Determinați distanța parcursă de microbuzul școlar în fiecare zi.

Segmente congruente

Spunem că două configurații geometrice sunt **congruente** dacă prin suprapunere coincid.

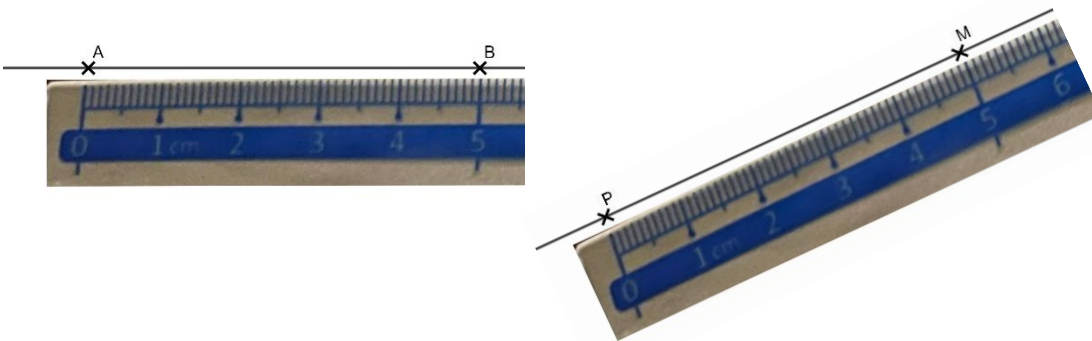



Două segmente se numesc **congruente** dacă prin suprapunere coincid.

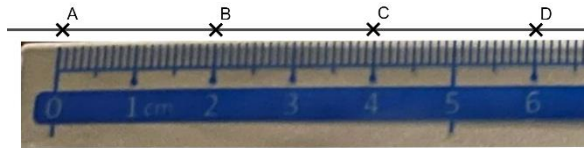
Practic: *două segmente care au aceeași lungime sunt congruente.*

Exemple:

 Dacă $AB = 5\text{ cm}$ și $PM = 5\text{ cm}$ segmentele AB și PM sunt congruente. Scriem $AB = PM$.



 $AB = 2\text{ cm}$ și $CD = 2\text{ cm}$ segmentele AB și CD sunt congruente. Scriem $AB = CD$.




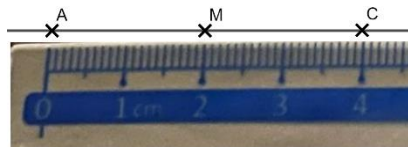
Mijlocul unui segment este punctul din interiorul segmentului care formează cu extremitățile segmentului două segmente congruente.



Pentru a determina mijlocul unui segment determinăm lungimea acestuia, împărțim cu 2 valoarea găsită apoi determinăm punctul situat pe segment la o distanță egală cu rezultatul împărțirii de unul dintre capetele acestuia.

Exemple:

 $AM = MC = 2\text{ cm}$, punctele A, M, C sunt coliniare. M este mijlocul segmentului AC .

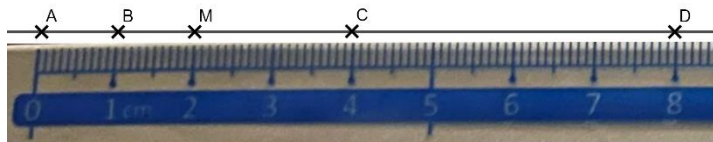


 În figura alăturată avem:

$$AB = BM = 1\text{ cm}$$

$$AM = MC = 2\text{ cm}$$

$$AC = CD = 4\text{ cm}$$



Deci

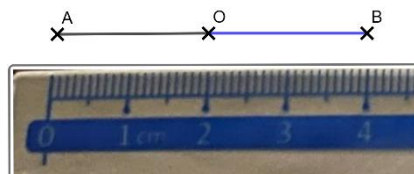
- B mijlocul segmentului AM ,
- M mijlocul segmentului AC ,
- C mijlocul segmentului AD .

Simetrie față de un punct


Simetricul punctului A față de punctul O este punctul B dacă O este mijlocul segmentului AB .

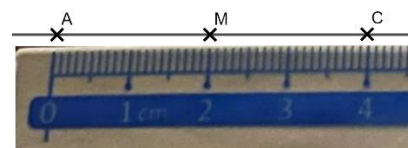



Pentru a construi simetricul punctului A față de punctul O unim cele două puncte și prelungim segmentul AO dincolo de O cu un segment congruent cu acesta.



Exemple:

 $AM = MC = 2\text{ cm}$, punctele A, M, C sunt coliniare. C este simetricul lui A față de M .

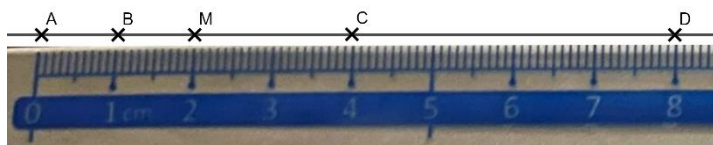


 În figura alăturată avem:

$$AB = BM = 1\text{ cm}$$

$$AM = MC = 2\text{ cm}$$

$$AC = CD = 4\text{ cm}$$



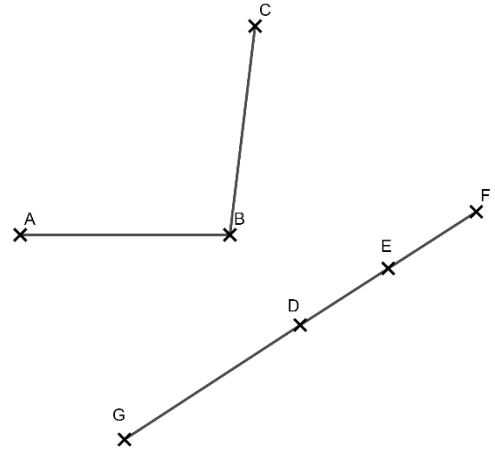
Deci

- M este simetricul lui A față de B ,
- C este simetricul lui A față de M ,
- D este simetricul lui A față de C .

Să exersăm!

1. Privește desenul alăturat și stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor următoare. (Măsoară segmentele cu ajutorul riglei.):

- | | | |
|--|---|---|
| a) $AB = BC$ | A | F |
| b) $GD = BC$ | A | F |
| c) $FE = DE$ | A | F |
| d) $FE = AB$ | A | F |
| e) B este mijlocul segmentului AC | A | F |
| f) D este mijlocul segmentului GE | A | F |
| g) E este mijlocul segmentului DF | A | F |
| f) F este simetricul lui G față de D | A | F |
| g) D este simetricul lui F față de E | A | F |
| h) G este simetricul lui F față de D | A | F |



2. Privește desenul alăturat și găsește cel puțin 10 perechi de segmente congruente. Scrie aici perechile găsite

Unghiul

Un punct situat pe o dreaptă o împarte în două semidrepte.

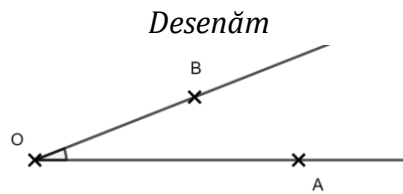


- ✓ Partea colorată cu verde reprezintă semidreapta AC .
- ✓ Partea colorată cu albastru reprezintă semidreapta AB .
- ✓ Punctul A reprezintă originea celor două semidrepte.

Unghiul reprezintă reuniunea a două semidrepte care au aceeași origine.




- ✓ Cele două semidrepte se numesc laturile unghiului.
- ✓ Originea comună a celor două semidrepte se numește vârful unghiului.

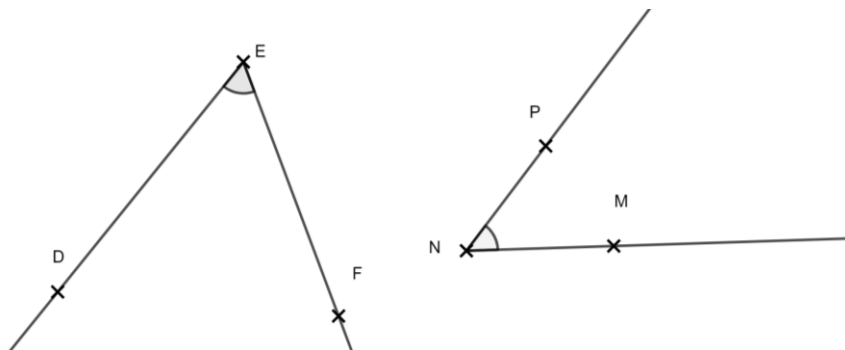


Citim
unghiul AOB
sau
unghiul BOA
sau
unghiul O

Scriem
 $\sphericalangle AOB$ sau \widehat{AOB}
sau
 $\sphericalangle BOA$ sau \widehat{BOA}
sau
 $\sphericalangle O$ sau \hat{O}

Exemple:

 unghiul MNP are vârful N , iar laturile lui sunt semidreptele NM și NP .





 $\sphericalangle DEF$ are vârful E , iar laturile lui sunt semidreptele ED și EF .

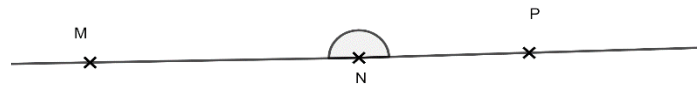
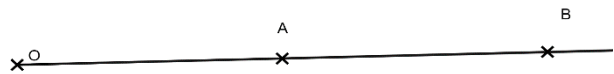


- ✓ Unghiul cu laturile identice se numește **unghi nul**.
- ✓ Unghiul cu laturile semidrepte opuse se numește **unghi alungit**.
- ✓ Unghiul nul și unghiul alungit se numesc **unghiuri improprii**.
- ✓ Unghiul care nu este nici nul și nici alungit se numește **unghi propriu**.

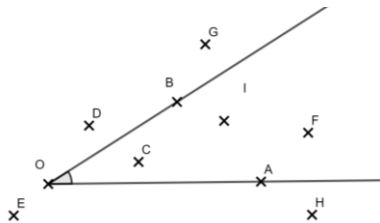
Exemple:

 $\sphericalangle AOB$ este un unghi nul.

 $\sphericalangle MNP$ este un unghi alungit.



Desenăm



Citim

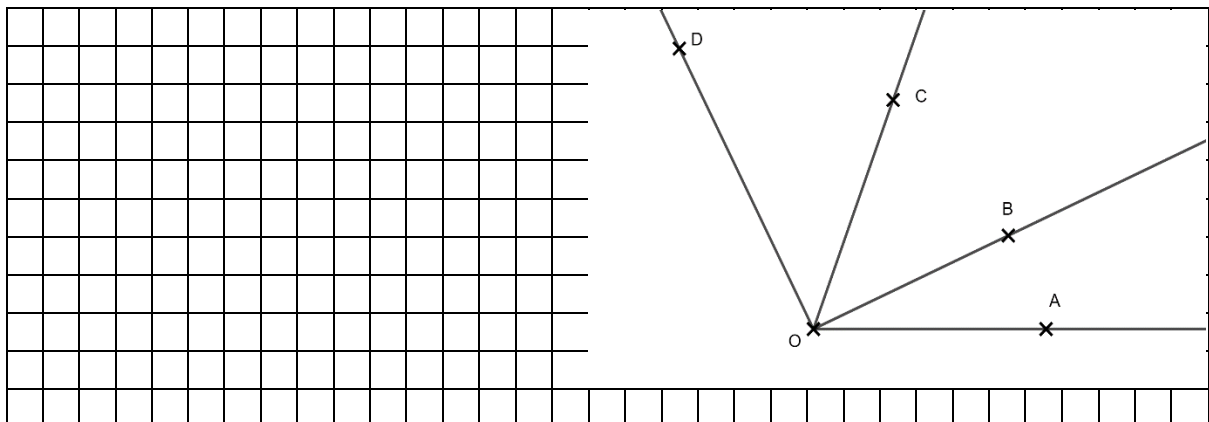
punctele A, O, B aparțin unghiului AOB

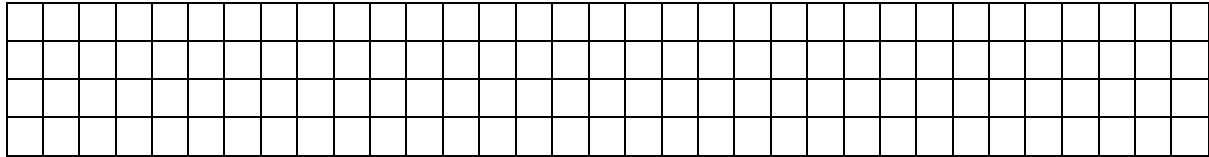
punctele C, F, I se află în interiorul unghiului AOB

punctele D, G, E, H se află în exteriorul unghiului AOB

Să exersăm!

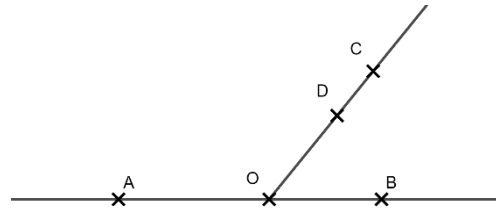
1. Scrieți cât mai multe unghiuri pe care le observați în figura alăturată.



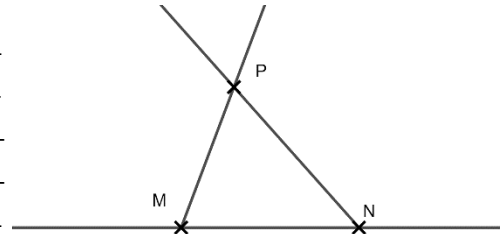


2. Folosind imaginile de mai jos completați enunțurile pentru a obține afirmații adevărate.

- $\sphericalangle AOB$ este un unghi _____
- $\sphericalangle ABO$ este un unghi _____
- $\sphericalangle BOA$ este un unghi _____
- $\sphericalangle COD$ este un unghi _____
- $\sphericalangle ODC$ este un unghi _____
- Punctul D se află în interiorul unghiului _____
- Punctul C se află în interiorul unghiului _____
- Punctul A se află în interiorul unghiului _____
- Punctul B se află în interiorul unghiului _____



- vârful $\sphericalangle MNP$ este punctul _____
- Semidreapta MP este o latură a unghiului _____
- Semidreapta MN este o latură a unghiului _____
- Semidreapta NM este o latură a unghiului _____
- vârful $\sphericalangle PMN$ este punctul _____



3. Desenați în spațiul de mai jos unghiul alungit ABC .

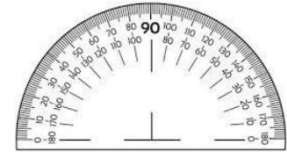
Folosind desenul făcut stabiliți valoarea de adevăr a afirmațiilor următoare.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\sphericalangle BAC$ este un unghi alungit. | A | F |
| b) $\sphericalangle BCA$ este un unghi nul. | A | F |
| c) $\sphericalangle CBA$ este un unghi alungit. | A | F |
| d) $\sphericalangle CAB$ este un unghi alungit. | A | F |

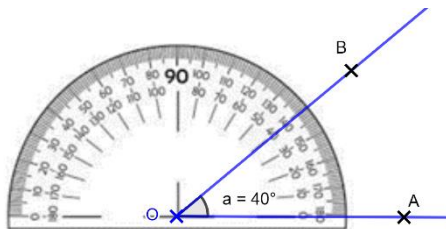
Măsurarea unghiurilor



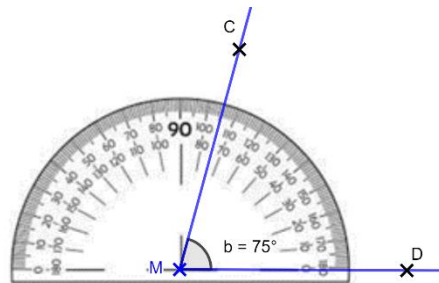
- ✓ Cea mai folosită unitate pentru măsurarea unghiurilor este unghiul de *un grad sexagesimal*.
- ✓ Măsura unui unghi este numărul care ne arată de câte ori se cuprinde unitatea de măsură în interiorul aceluși unghi.
- ✓ Instrumentul folosit pentru măsurarea unghiurilor este *raportorul*.



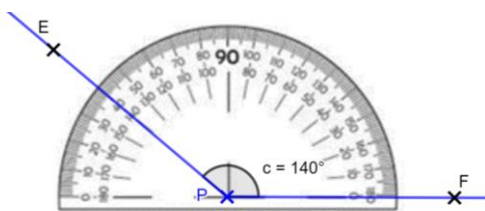
Exemple:



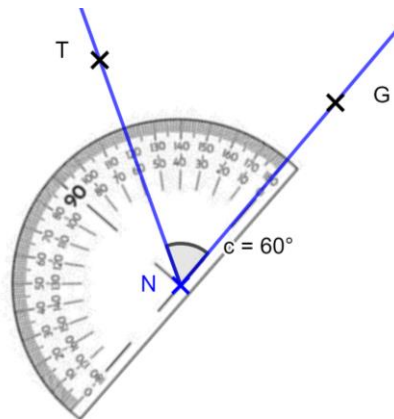
$$\sphericalangle AOB = 40^\circ$$



$$\sphericalangle CMD = 75^\circ$$



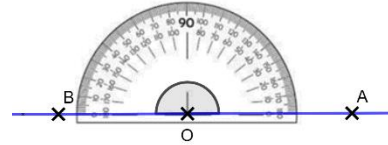
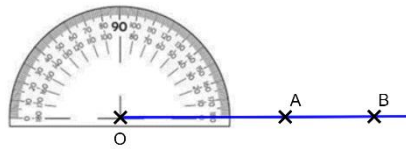
$$\sphericalangle EPF = 140^\circ$$



$$\sphericalangle TNG = 60^\circ$$

Dacă $\sphericalangle AOB$ este **unghi nul**, atunci el are măsura egală cu 0° .

Dacă $\sphericalangle AOB$ este **unghi alungit**, atunci el are măsura egală cu 180° .



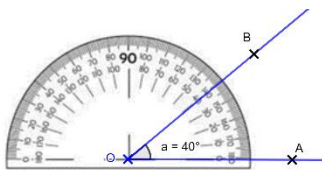
Clasificarea unghiurilor

Unghiul ascuțit este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 0° și 90° .

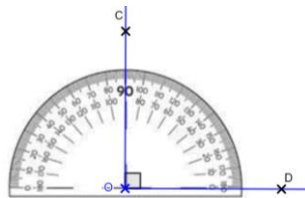
Unghiul drept este unghiul a cărui măsură este egală cu 90° .

Unghiul obtuz este unghiul a cărui măsură este cuprinsă între 90° și 180° .

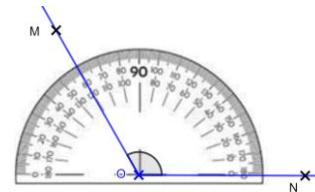
Exemple:



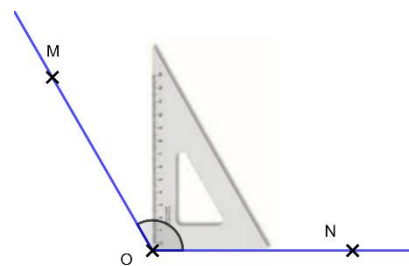
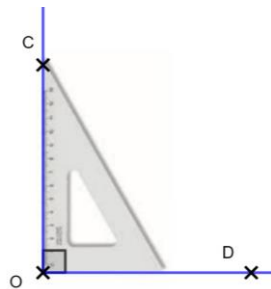
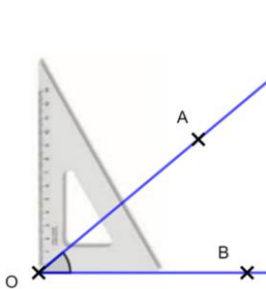
$\sphericalangle AOB$ unghi ascuțit



$\sphericalangle COD$ unghi drept

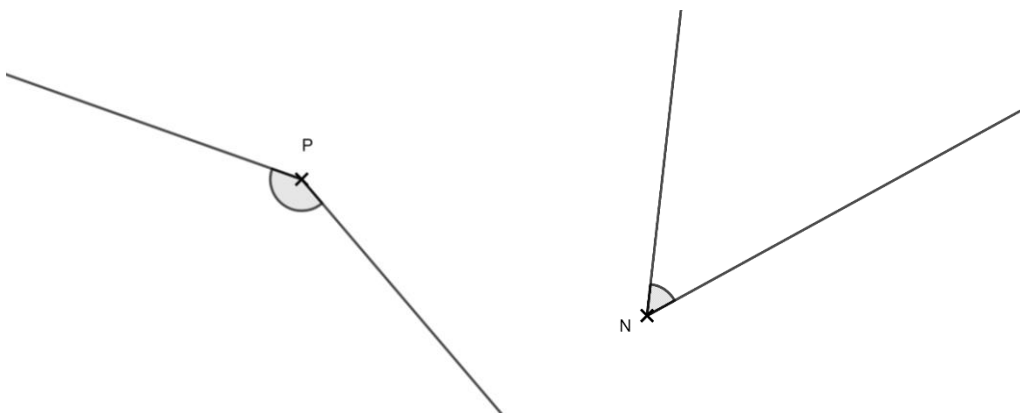
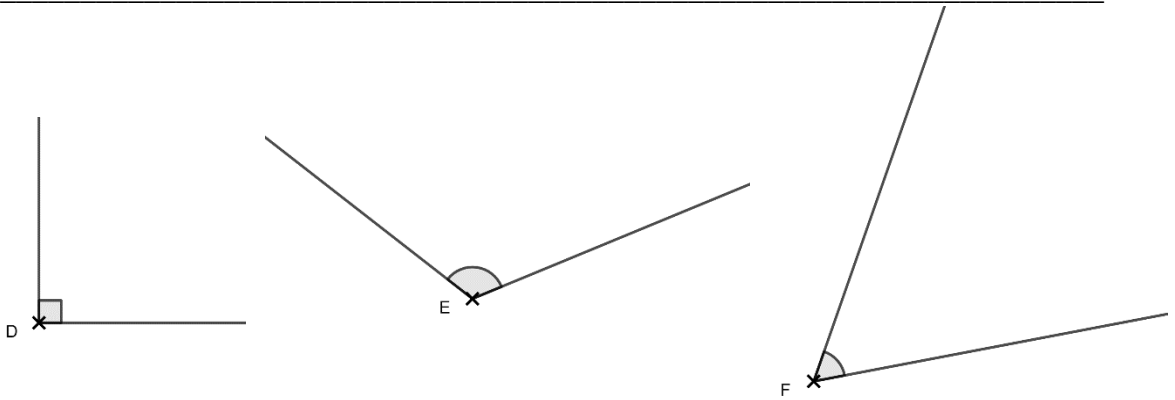
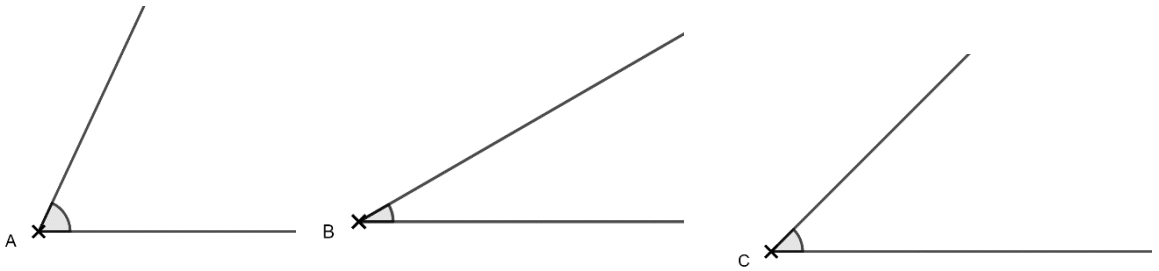


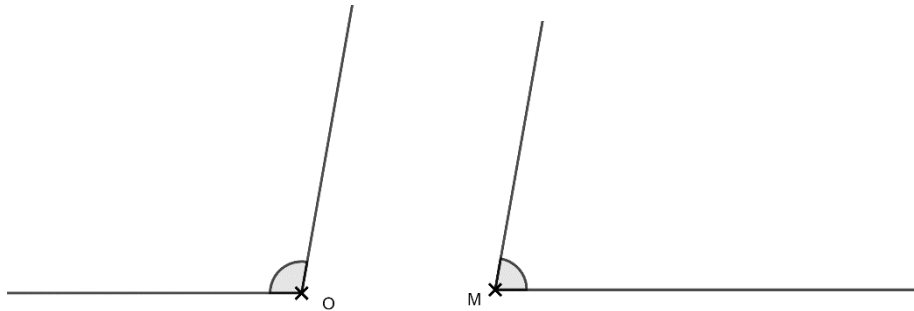
$\sphericalangle MON$ unghi obtuz



Să exersăm!

1. Folosind raportorul determinați măsura următoarelor unghiuri:



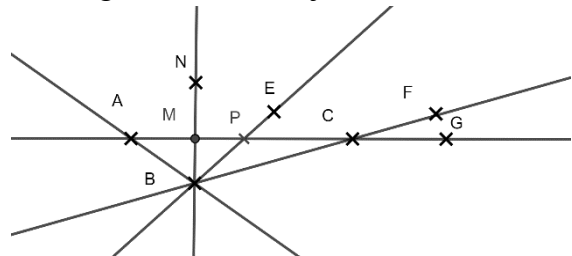


2. Stabiliți natura unghiurilor de mai jos și completați cu varianta corectă. (*nul, ascuțit, drept, obtuz, alungit*).

- | | |
|--|-------------|
| a) $\sphericalangle M = 30^\circ$ | unghi _____ |
| b) $\sphericalangle N = 130^\circ$ | unghi _____ |
| c) $\sphericalangle P = 80^\circ$ | unghi _____ |
| d) $\sphericalangle A = 90^\circ$ | unghi _____ |
| e) $\sphericalangle B = 135^\circ$ | unghi _____ |
| f) $\sphericalangle C = 0^\circ$ | unghi _____ |
| g) $\sphericalangle T = 70^\circ$ | unghi _____ |
| h) $\sphericalangle D = 45^\circ$ | unghi _____ |
| i) $\sphericalangle O = 180^\circ$ | unghi _____ |
| j) $\sphericalangle M = 91^\circ$ | unghi _____ |
| k) $\sphericalangle M = 2 \cdot \sphericalangle D$ | unghi _____ |
| l) $\sphericalangle M = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle O$ | unghi _____ |

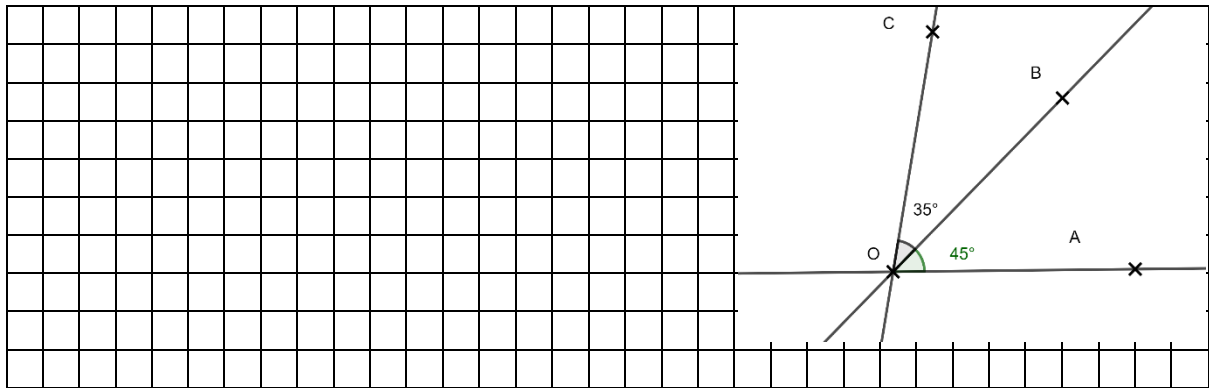
3. Folosind echerul în figura alăturată stabiliți natura unghiurilor de mai jos.

- $\sphericalangle AMC$ este un unghi _____
- $\sphericalangle AMB$ este un unghi _____
- $\sphericalangle PBC$ este un unghi _____
- $\sphericalangle PBA$ este un unghi _____
- $\sphericalangle APB$ este un unghi _____
- $\sphericalangle ACP$ este un unghi _____
- $\sphericalangle PCB$ este un unghi _____
- $\sphericalangle BAM$ este un unghi _____
- $\sphericalangle EPC$ este un unghi _____
- $\sphericalangle FCG$ este un unghi _____
- $\sphericalangle AMB$ este un unghi _____

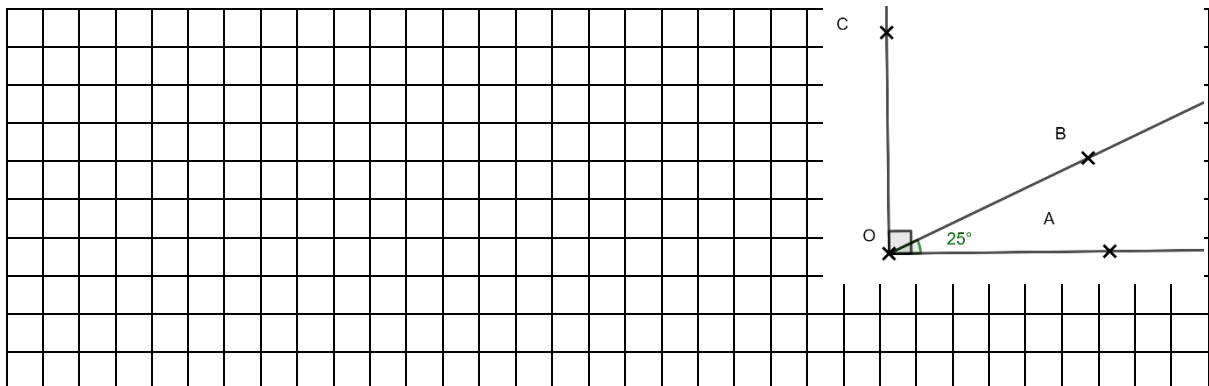


- l) $\sphericalangle MPC$ este un unghi _____
 m) $\sphericalangle ABC$ este un unghi _____
 n) $\sphericalangle NMC$ este un unghi _____
 o) $\sphericalangle ACB$ este un unghi _____
 p) $\sphericalangle MPE$ este un unghi _____

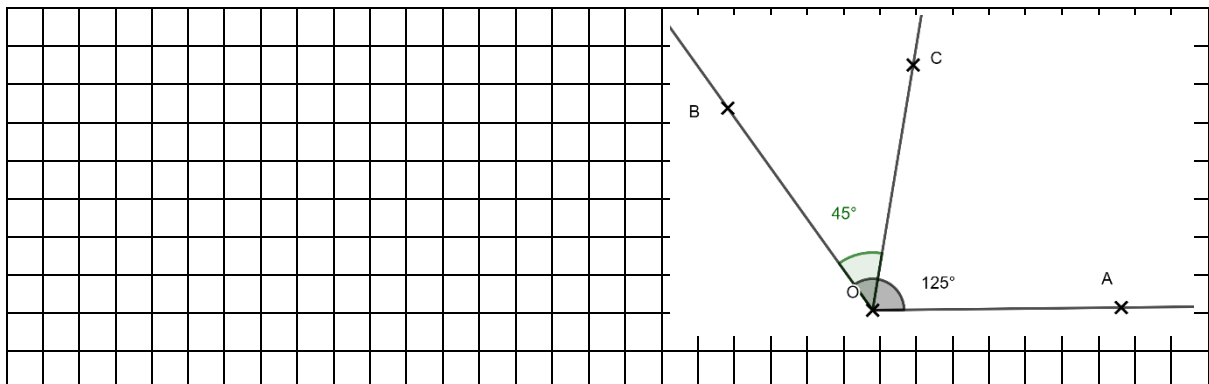
4. În figura alăturată $\sphericalangle AOB = 45^\circ$ și $\sphericalangle COB = 35^\circ$. Calculați măsura unghiului AOC .



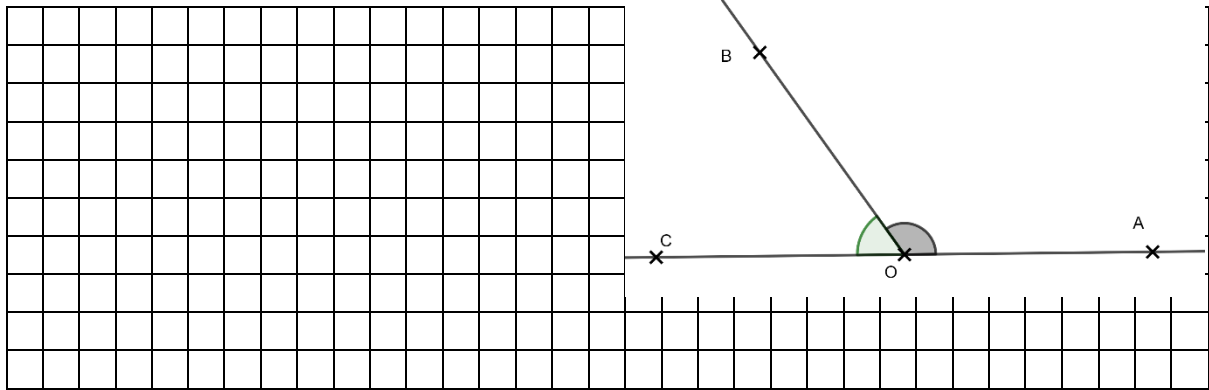
5. În figura alăturată $\sphericalangle AOB = 25^\circ$ și $\sphericalangle AOC = 90^\circ$. Calculați măsura unghiului BOC .



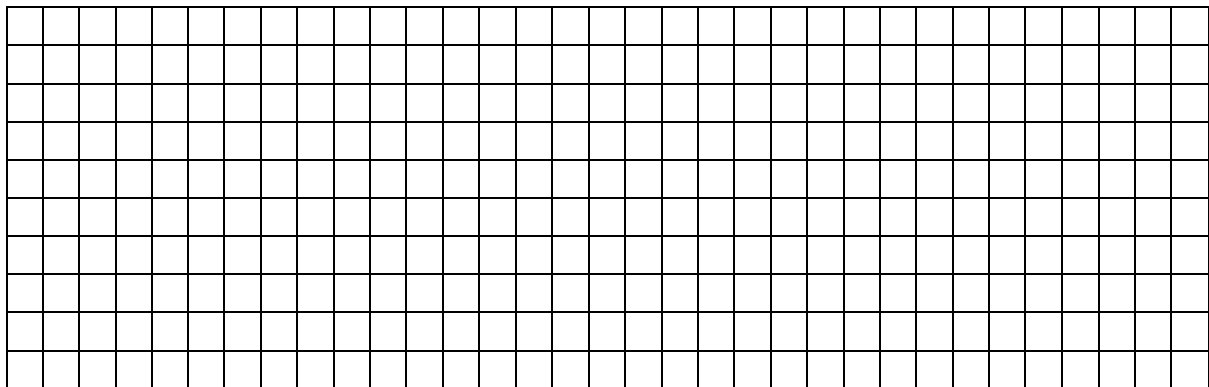
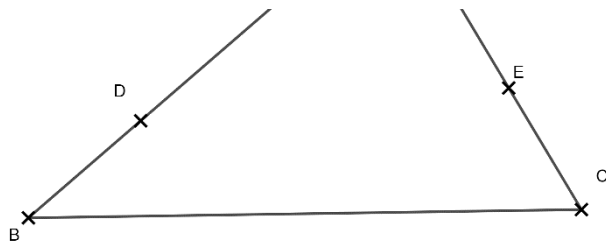
6. În figura alăturată $\sphericalangle AOB = 125^\circ$ și $\sphericalangle COB = 35^\circ$. Calculați măsura unghiului AOC .



7. În figura utilizând raportorul determinați măsurile unghiurilor AOB și COB , apoi calculați măsura unghiului AOC . Ce observați?



8. În figura utilizând raportorul determinați măsurile unghiurilor DBC și ECB . Dacă A este punctul de intersecție al dreptelor BD și CE calculați măsura unghiului AOC .




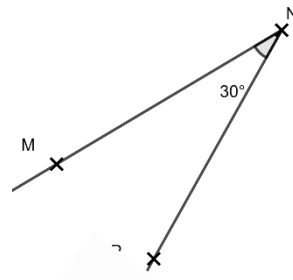
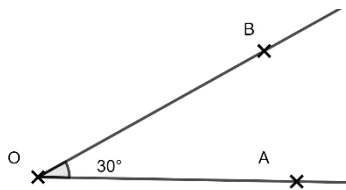
Unghiuri congruente




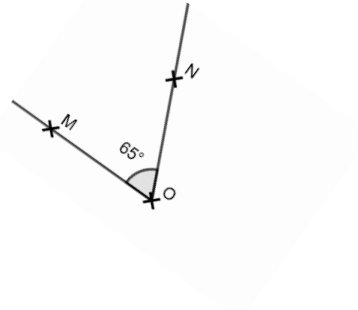
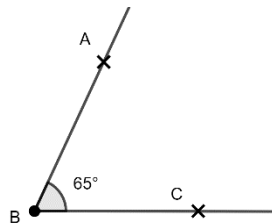
- ✓ Două unghiuri care au aceeași măsură se numesc **unghiuri congruente**.
- ✓ Dacă unghiurile AOB și MNP sunt congruente scriem $\sphericalangle AOB = \sphericalangle MNP$.

Exemple:

 $\sphericalangle AOB = \sphericalangle MNP = 30^\circ$

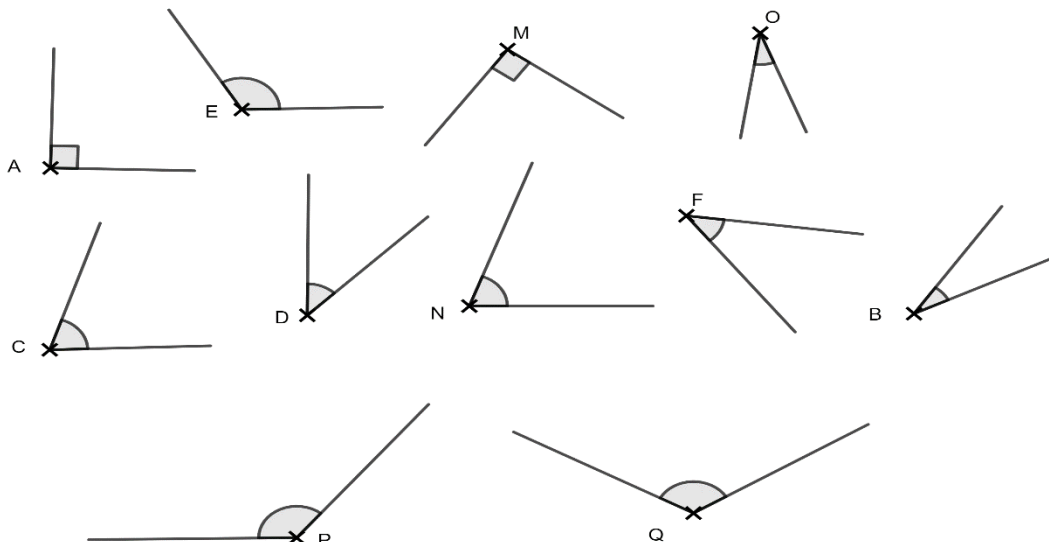


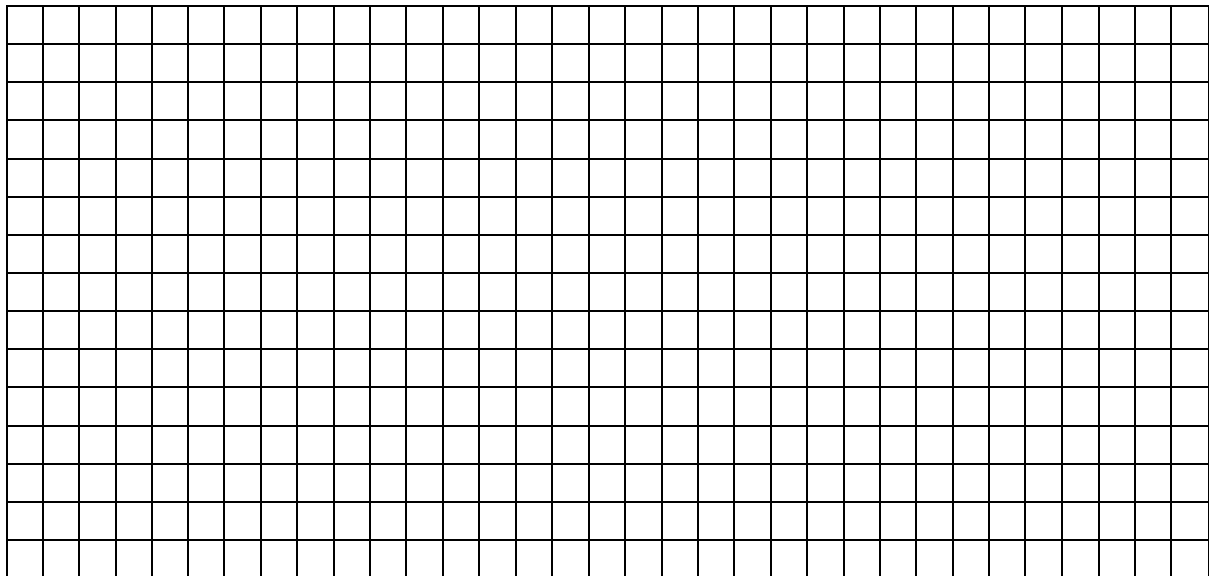
 $\sphericalangle ABC = \sphericalangle MON = 65^\circ$



Să exersăm!

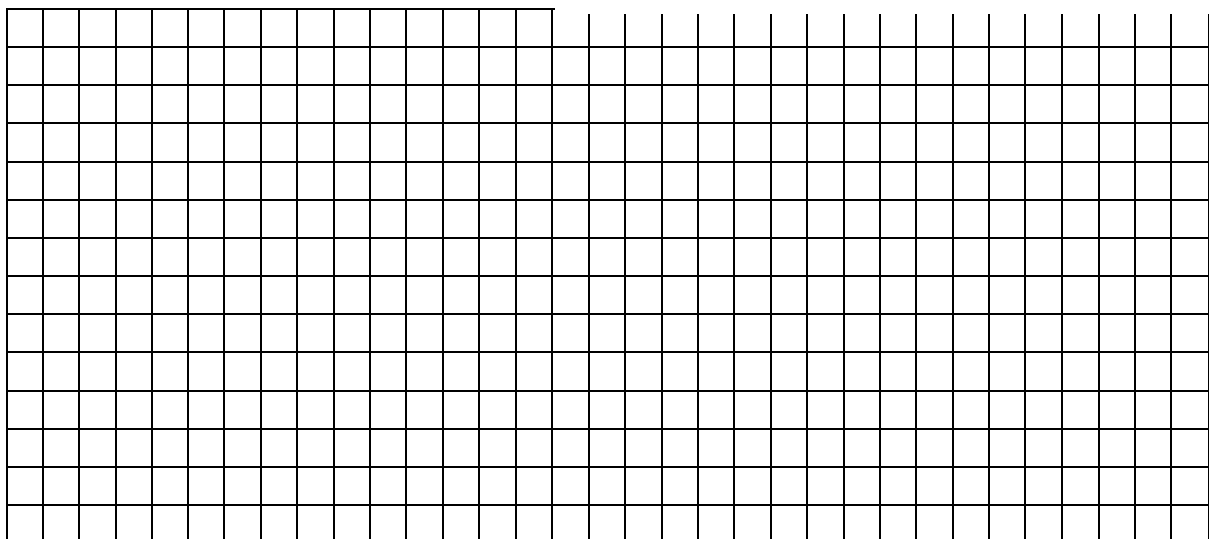
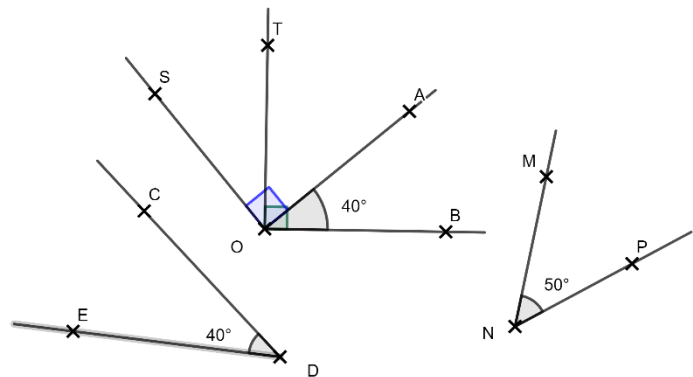
1. Măsurați cu ajutorul raportorului următoarele unghiuri și găsiți perechile de unghiuri congruente.





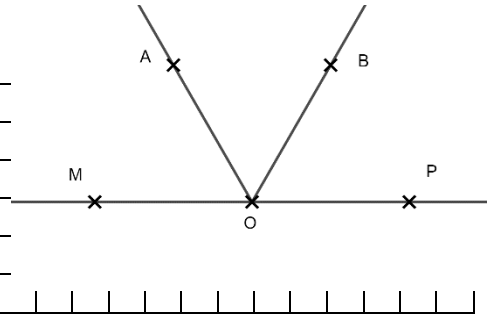
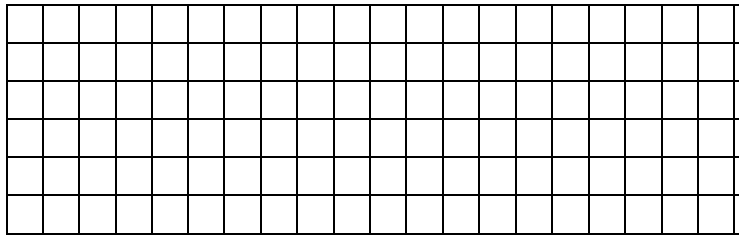
2. Utilizând figurile de mai jos completați enunțurile următoare pentru a obține afirmații adevărate.

- a) $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle CDE$ sunt _____
- b) $\sphericalangle AOT =$ _____ $^\circ$
- c) $\sphericalangle PNM$ și \sphericalangle _____ sunt unghiuri congruente.
- d) $\sphericalangle SOT =$ _____ $^\circ$
- e) $\sphericalangle SOT = \sphericalangle$ _____

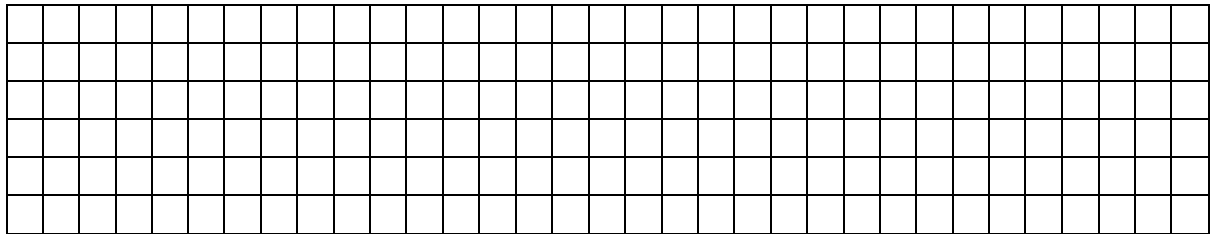


3. În figura alăturată punctele M, O, P sunt coliniare și $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOP$ și $\sphericalangle AOM$ sunt congruente.

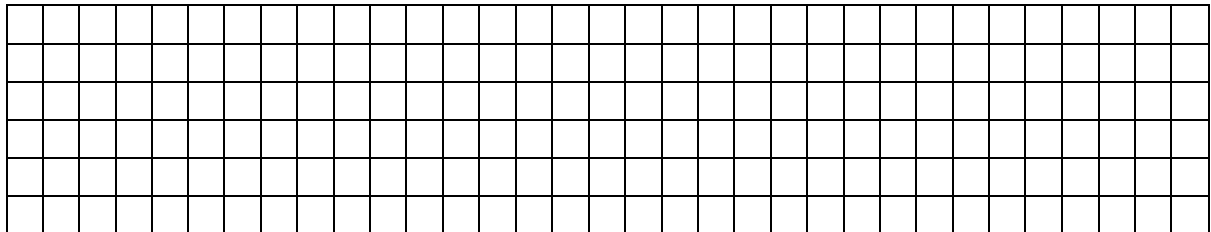
a) Calculați măsura unghiului AOB .



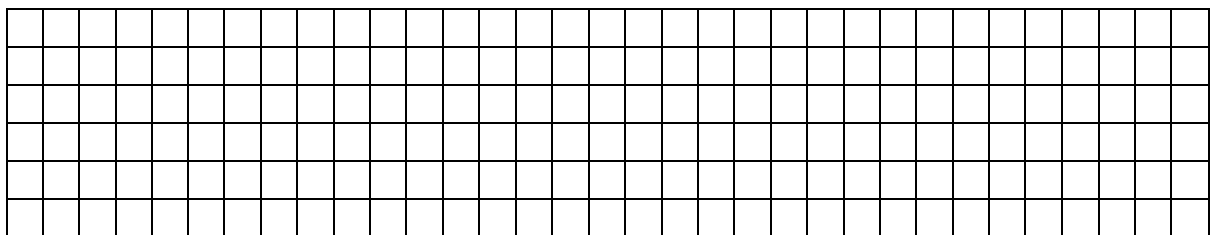
b) Calculați măsura unghiului POB .



c) Calculați măsura unghiului BOM .

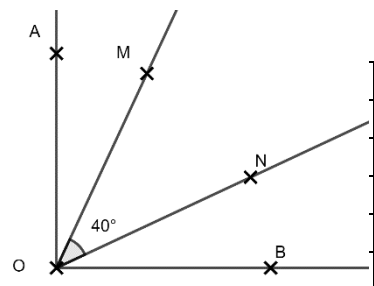
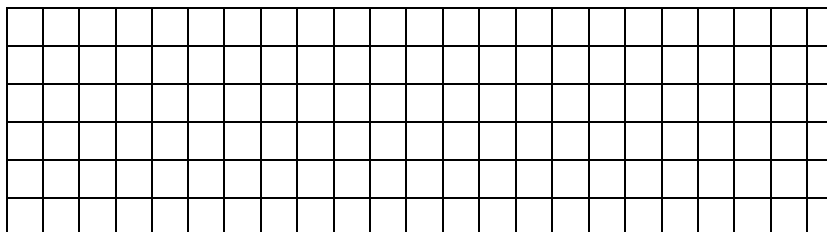


d) Calculați măsura unghiului AOP .



4. În figura alăturată unghiul AOB este un unghi drept, $\sphericalangle MON = 40^\circ$ și $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BON$.

a) Calculați măsura unghiului AOM .



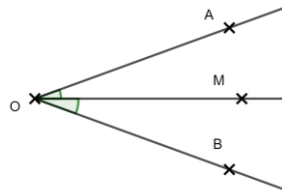
Bisectoarea unui unghi



- ✓ **Bisectoarea unui unghi** este semidreapta interioară unghiului, cu originea în vârful acestuia care formează cu laturile unghiului două unghiuri congruente.
- ✓ Orice unghi propriu are o singură bisectoare.

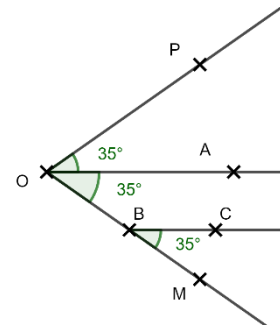


Desenăm





Citim

OM este bisectoarea unghiului AOB

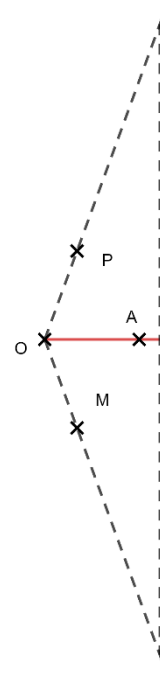
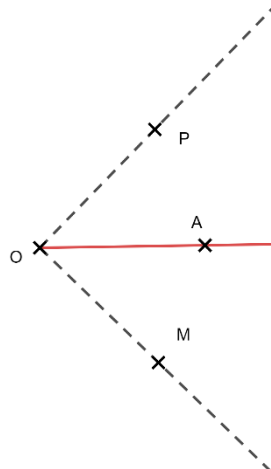
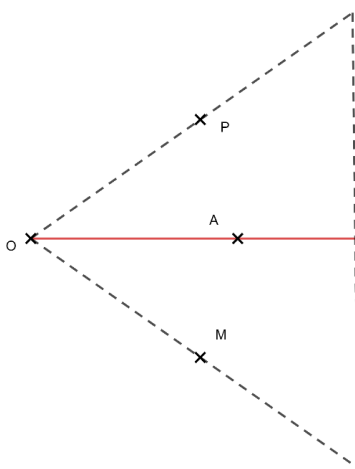


Exemple:

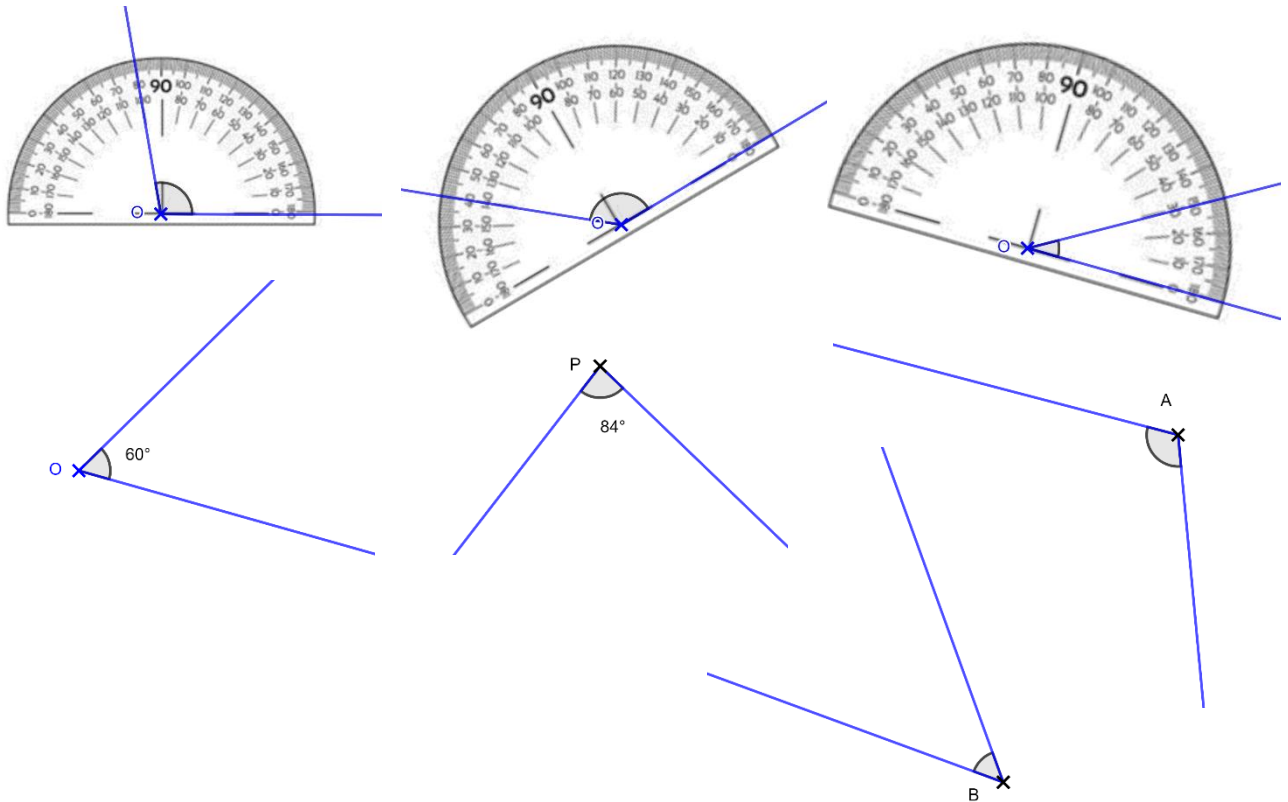
-  OA este bisectoarea $\sphericalangle POM$.
-  BC nu este bisectoarea $\sphericalangle POM$ deoarece semidreapta nu are originea în vârful unghiului.

Să exersăm !

1. Decupează figurile de mai jos de-a lungul liniilor punctate. Fiecare decupaj obținut îndoiaie-l de-a lungul liniei roșii. Ce poți să spui despre unghiurile POA și AOM ?

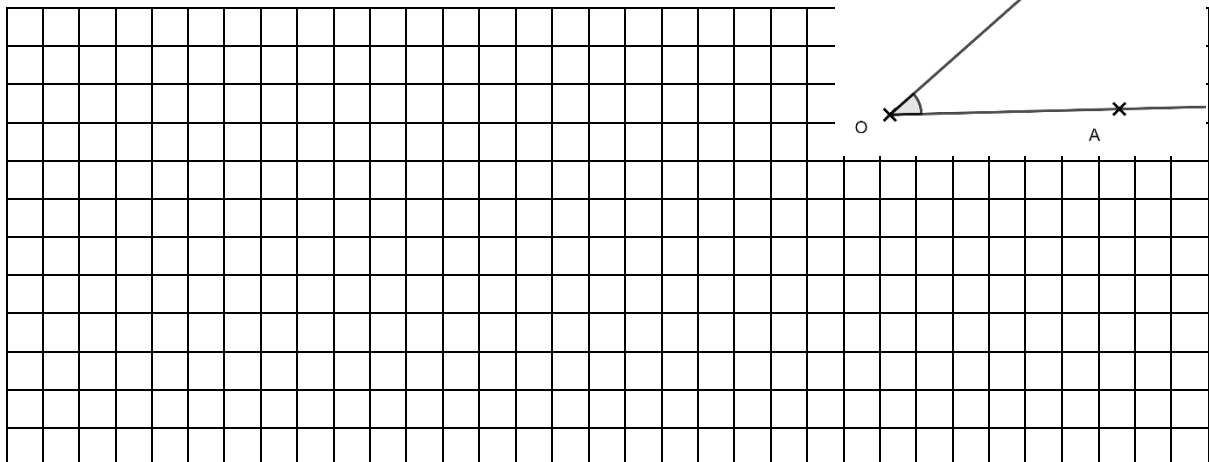


2. Folosind raportorul desenează bisectoarele următoarelor unghiuri:



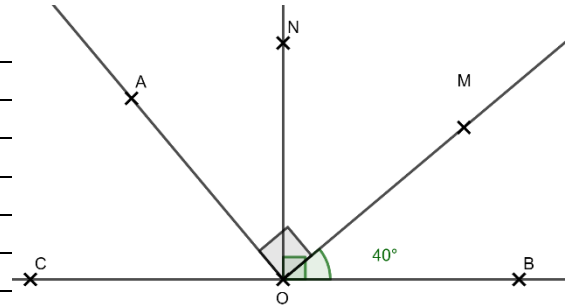
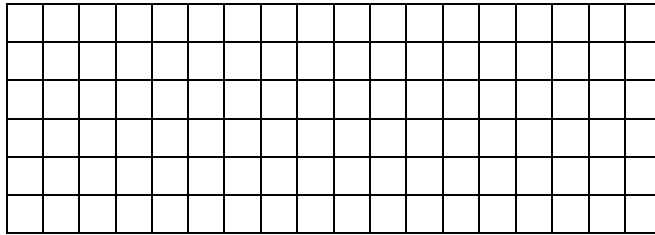
3. În figura alăturată măsura $\sphericalangle AOB = 40^\circ$. Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB atunci:

- desenează semidreapta OM
- calculează măsura unghiurilor AOM și BOM.

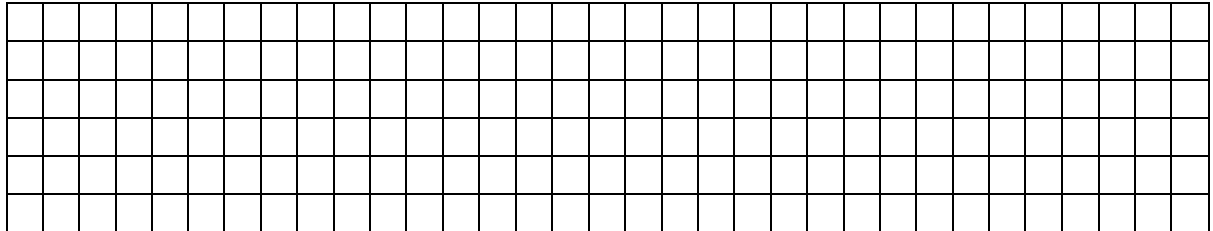


4. În figura alăturată $\sphericalangle COB$ este unghi alungit, $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BON = 90^\circ$ și $\sphericalangle BOM = 40^\circ$. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\sphericalangle NOM = 40^\circ$ A F



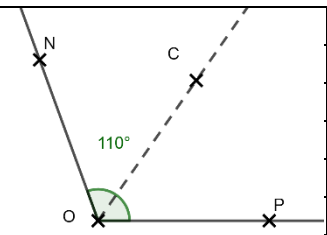
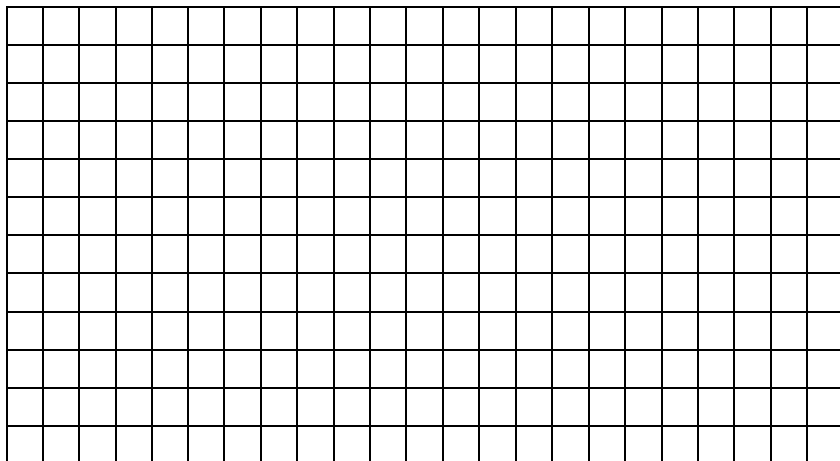
b) $\sphericalangle AOC = 40^\circ$ A F



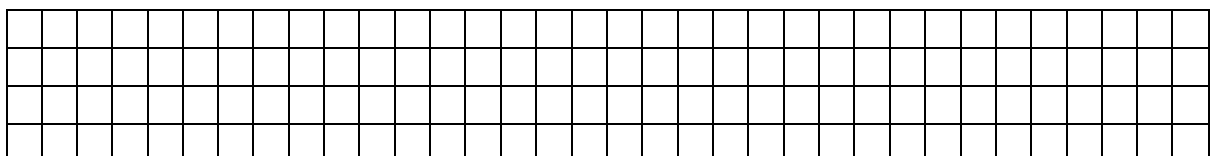
c) OM este bisectoarea unghiului BON A F

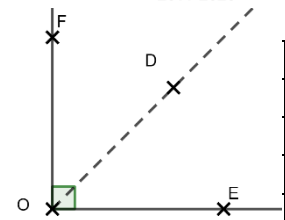
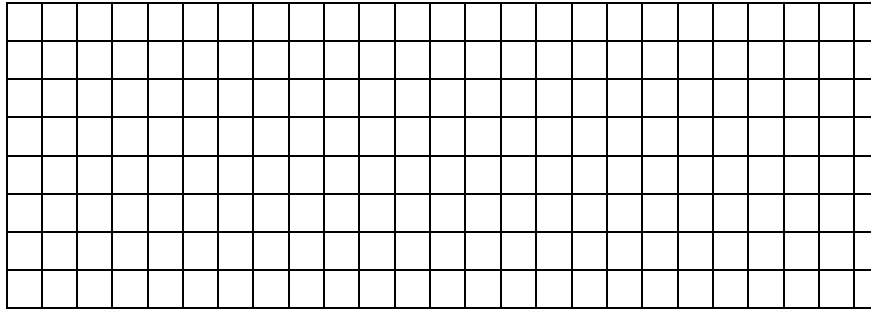
d) ON este bisectoarea unghiului AOM A F

5. În figura alăturată semidreapta OC este bisectoarea unghiului NOP și măsura $\sphericalangle NOP = 110^\circ$. Calculați măsura $\sphericalangle NOC$ și măsura $\sphericalangle COP$.

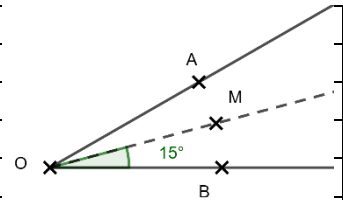
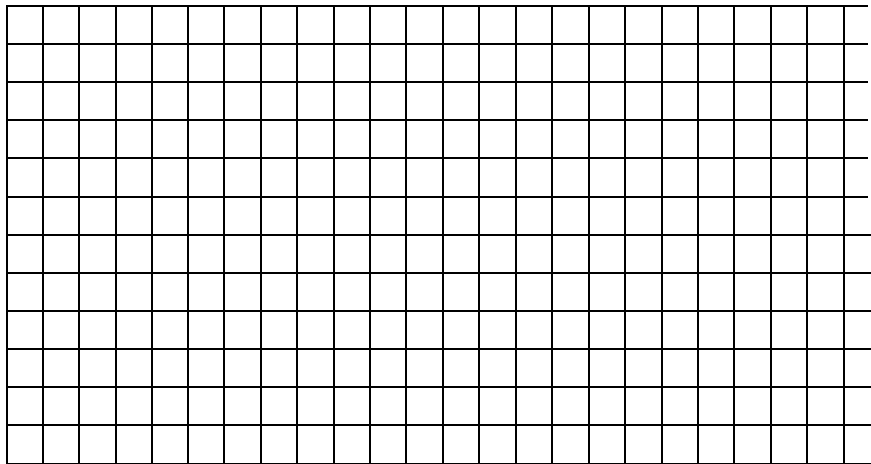


6. În figura alăturată semidreapta OD este bisectoarea unghiului drept EOF . Calculați măsura $\sphericalangle EOD$ și măsura $\sphericalangle DOF$.

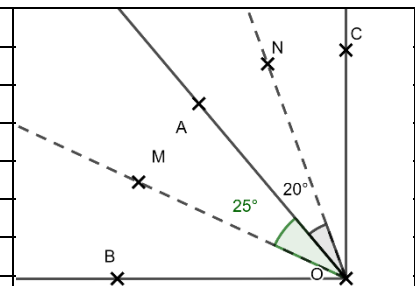
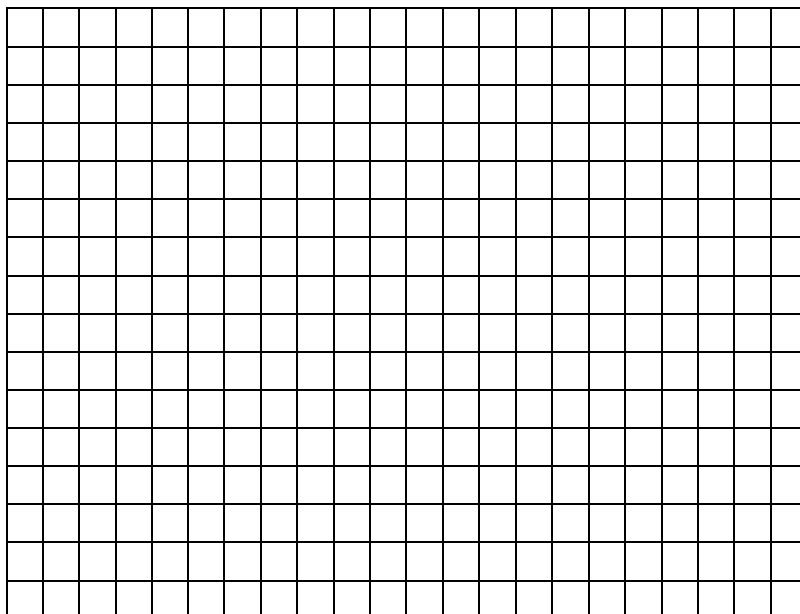




7. În figura alăturată semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și măsura $\sphericalangle BOM = 15^\circ$. Calculați măsura $\sphericalangle AOM$ și măsura $\sphericalangle BOA$.



8. În figura alăturată semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB , ON este bisectoarea unghiului AOC , măsura $\sphericalangle AOM = 25^\circ$ și măsura $\sphericalangle AON = 20^\circ$. Calculați măsura $\sphericalangle AOB$, măsura $\sphericalangle AOC$ și măsura $\sphericalangle BOC$.



Drepte paralele. Axioma paralelelor

O dreaptă care intersectează două drepte oarecare distincte se numește *secantă*.

O secantă formează cu cele două drepte 8 unghiuri.

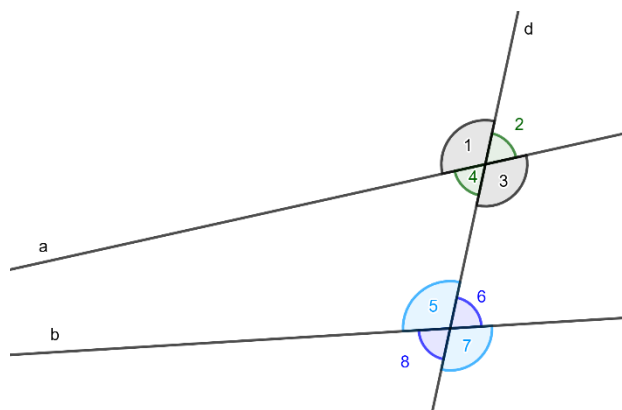
Ele se denumesc astfel:

- *Unghiuri alterne interne*: $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 6$ sau $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 5$. (sunt situate de o parte și de alta a secantei d între cele două drepte a și b)



- *Unghiuri alterne externe*: $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 7$ sau $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 8$. (sunt situate de o parte și de alta a secantei d în afara zonei marginată de dreptele a și b)

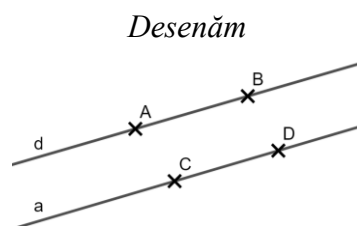
- *Unghiuri corespondente*: $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 5$ sau $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 6$ sau $\sphericalangle 3$ și $\sphericalangle 7$ sau $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 8$. (sunt situate de aceeași parte a secantei d unul în zona dintre dreptele a și b și unul în afara acesteia)



Să ne amintim!



Două drepte situate în același plan care nu au puncte comune se numesc **drepte paralele**.



Citim

Dreptele AB și CD sunt paralele.

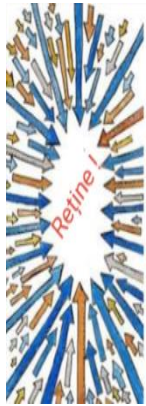
Scriem

$AB \parallel CD$

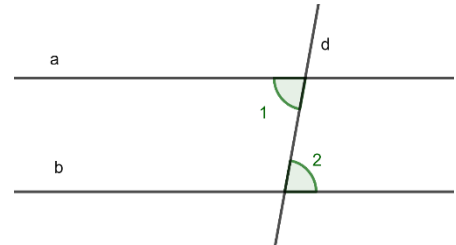
Dreptele a și d sunt paralele.

$a \parallel d$

Cum recunoaștem două drepte paralele

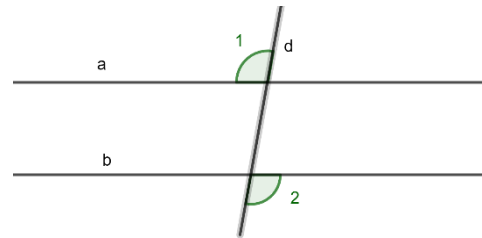


✓ Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.



$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, iar $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2$ sunt alterne interne, deci $a \parallel b$.

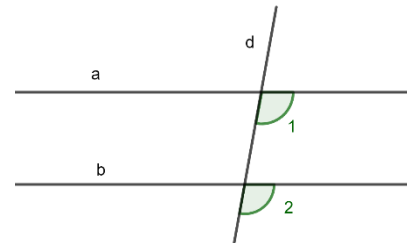
✓ Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.



$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, iar $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2$ sunt alterne externe, deci $a \parallel b$.




✓ Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.

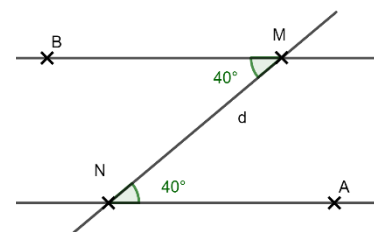



$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, iar $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 2$ sunt corespondente, deci $a \parallel b$.

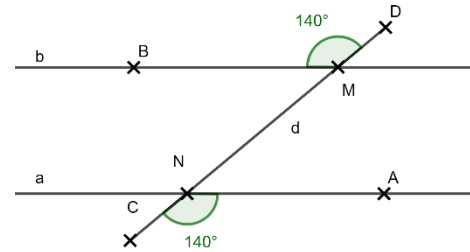
✓ Dacă două drepte diferite sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci dreptele sunt paralele.


Exemple:

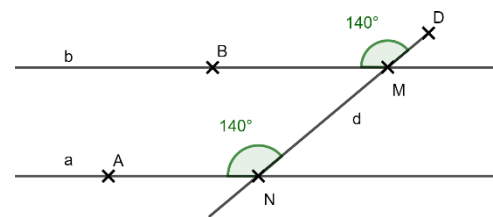
 $\sphericalangle BMN = \sphericalangle MNA$ iar $\sphericalangle BMN, \sphericalangle MNA$ alterne interne
 $\Rightarrow BM \parallel AN$.



 $\sphericalangle BMD = \sphericalangle CNA$ iar $\sphericalangle BMD, \sphericalangle CNA$ alterne externe $\Rightarrow BM \parallel AN$.



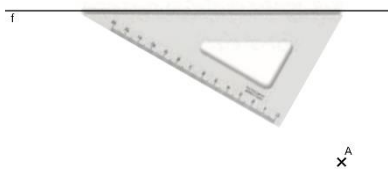
 $\sphericalangle BMD = \sphericalangle MNA$, iar $\sphericalangle BMD, \sphericalangle CNA$ corespondente $\Rightarrow BM \parallel AN$.



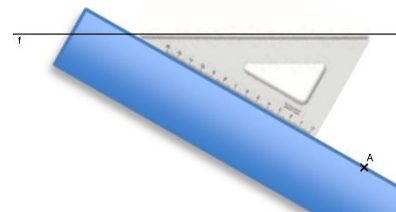
Axioma paralelelor

Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată.

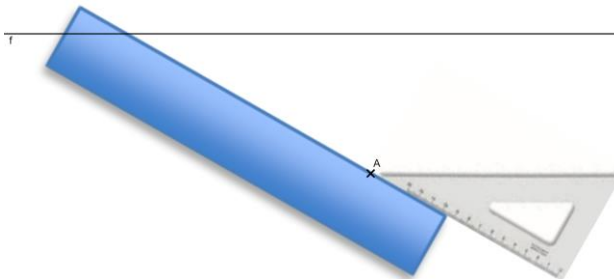
Cum construim două drepte paralele



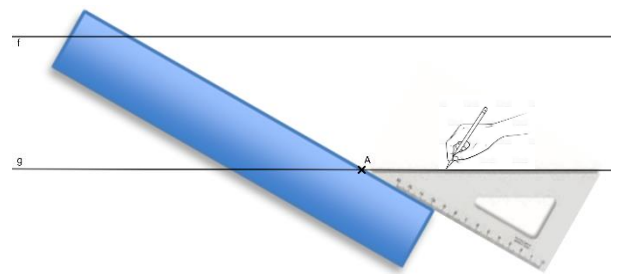
Pasul 1: Așezăm echerul cu latura cea mai lungă (ipotenuză) pe dreaptă.



Pasul 2: Așezăm rigla astfel încât să treacă prin punct și să fie sprijinită de o altă latură a echerului.



Pasul 3: Ținem rigla fixă și deplasăm echerul sprijinit pe riglă până ajungem în punctul A.



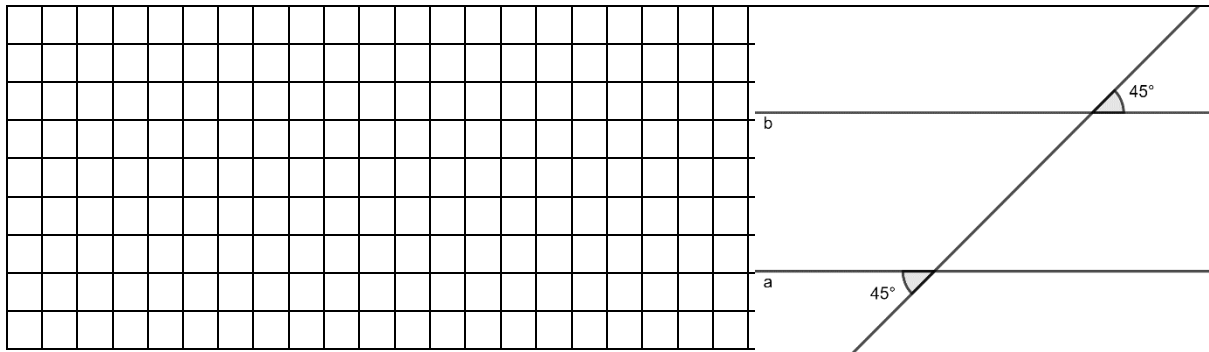
Pasul 4: Trasăm dreapta ce trece prin punctul A de-a lungul laturii mai lungi a echerului.

Dreapta astfel obținută este paralelă cu dreapta dată.

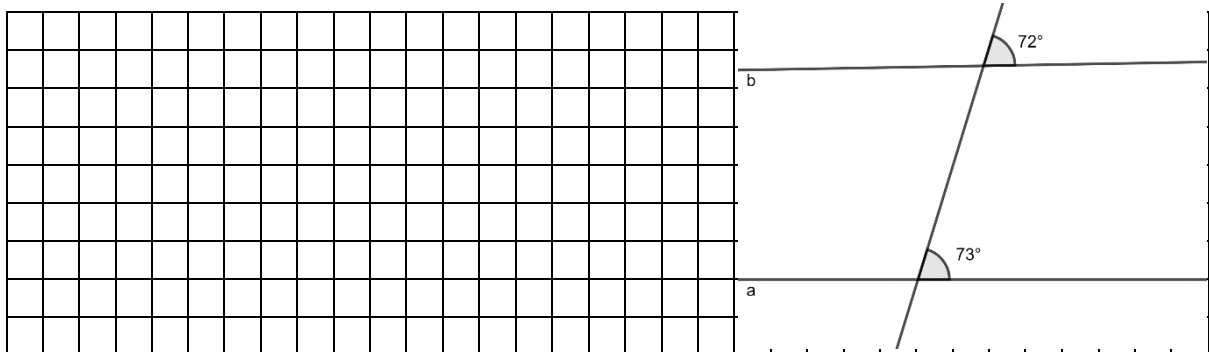
Să exersăm!

1. Stabiliți în care dintre următoarele situații dreptele a și b sunt paralele:

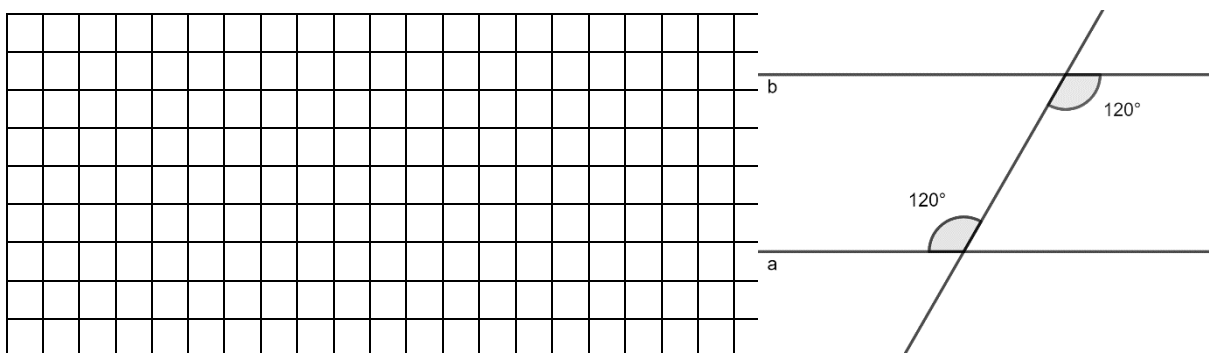
a)



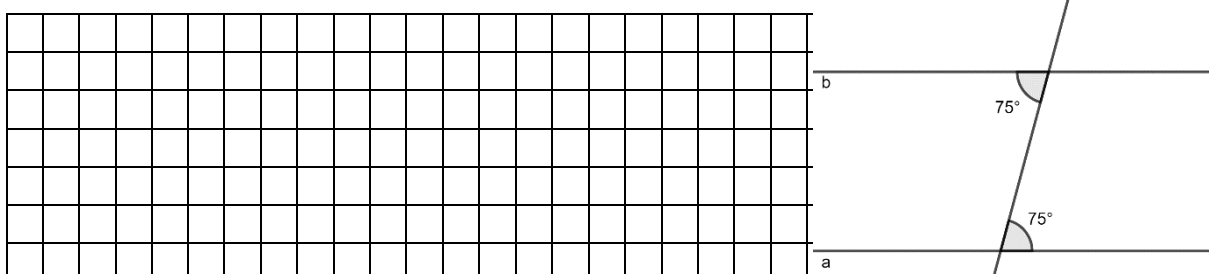
b)

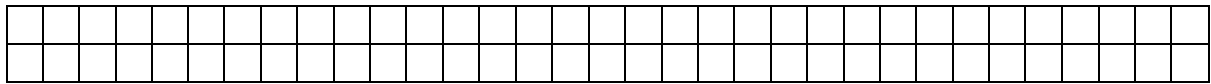


c)

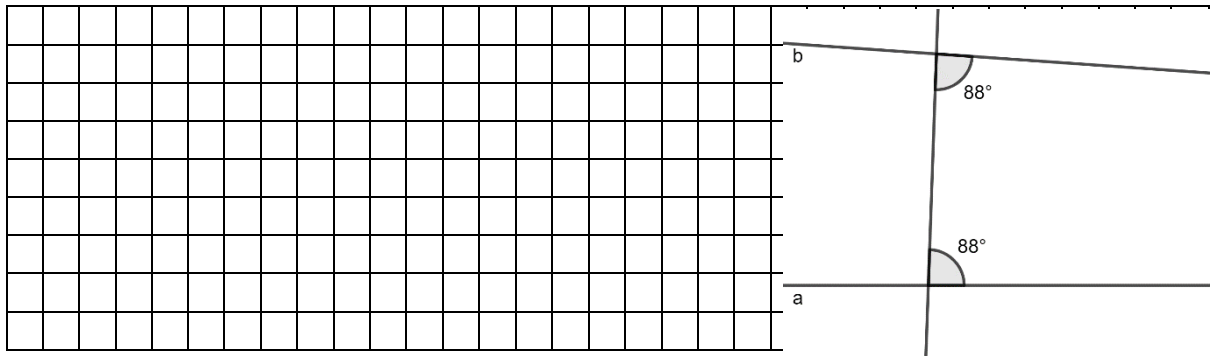


d)



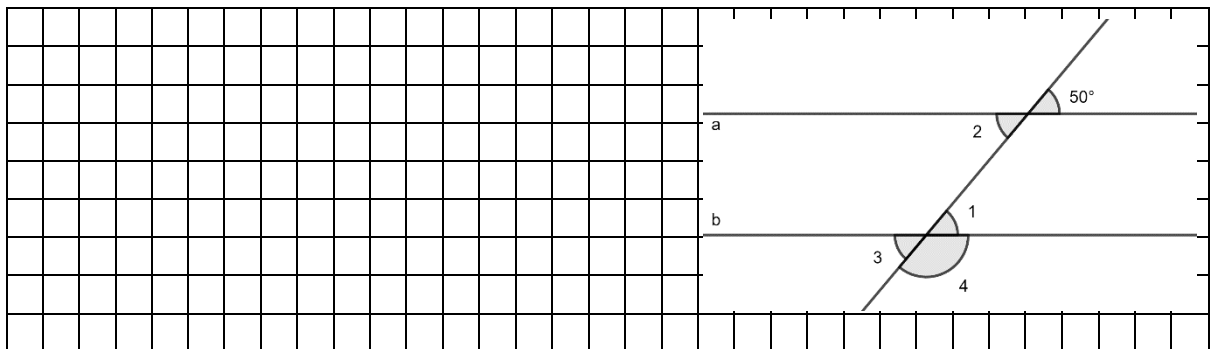


e)

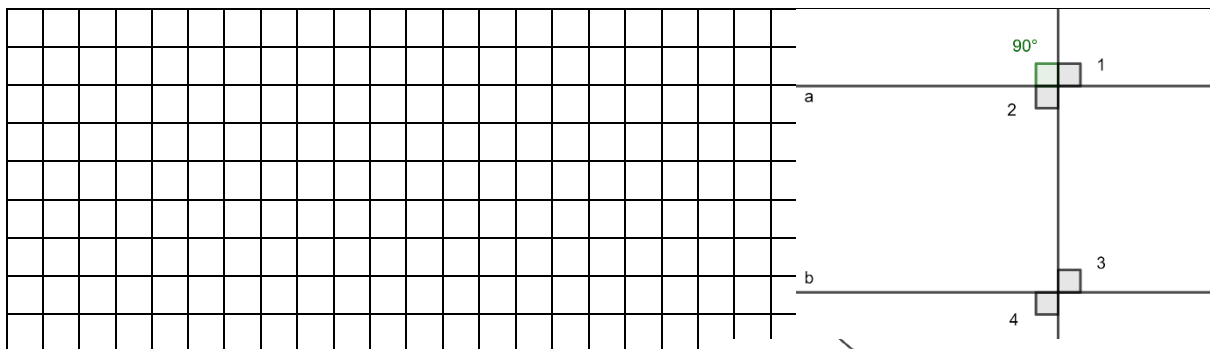


2. Dacă dreptele a și b sunt paralele determinați în fiecare caz unghiurile $\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$, $\sphericalangle 3$, $\sphericalangle 4$.

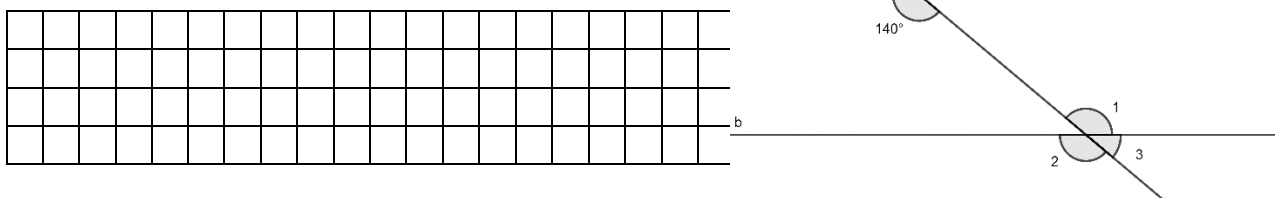
a)

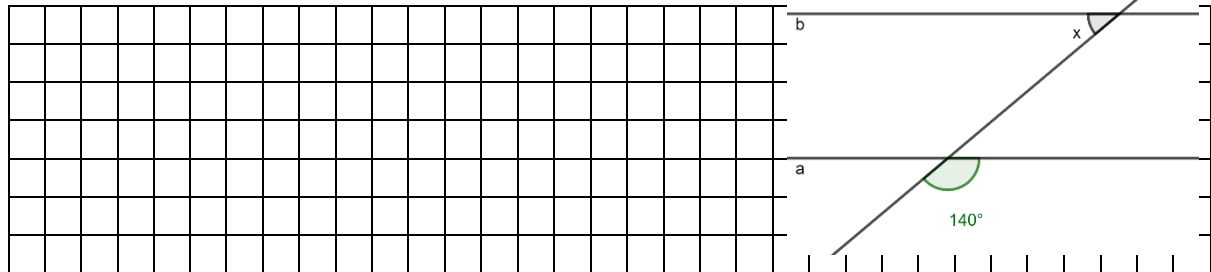


b)

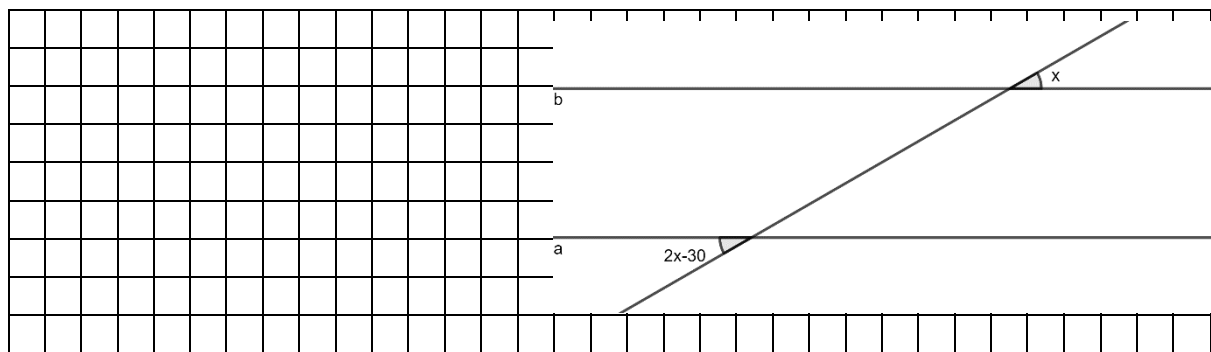


c)



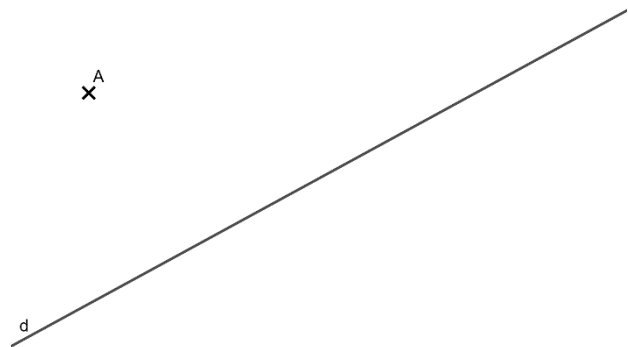


e)

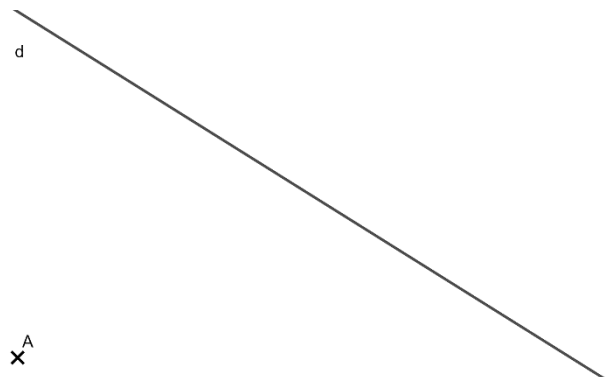


4. Construiți prin A dreapta paralelă cu dreapta d în fiecare din următoarele cazuri:

a)

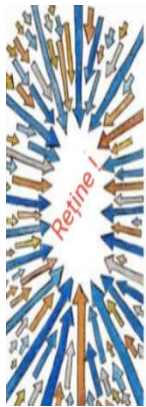


b)

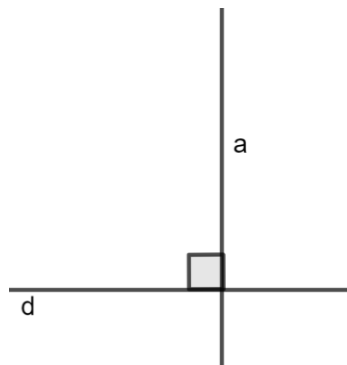


Drepte perpendiculare. Distanța de la un punct la o dreaptă

Două drepte concurente ce formează un unghi de 90° se numesc *drepte perpendiculare*.



Desenăm

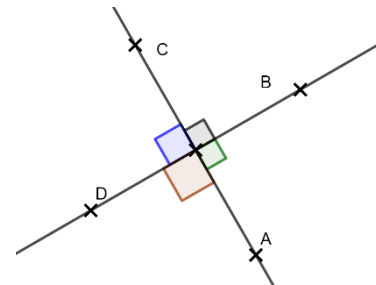


Citim

Dreapta d este perpendiculară pe dreapta a

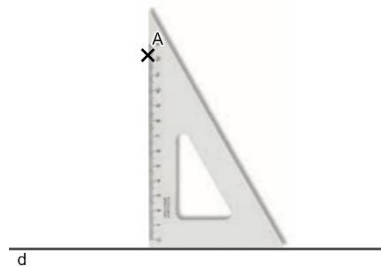
Scriem

$$d \perp a$$

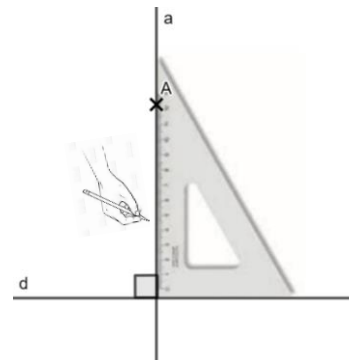


- ✓ Două drepte perpendiculare formează 4 unghiuri drepte.
- ✓ Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc *oblice*.
- ✓ Printr-un punct exterior unei drepte trece o singură dreaptă perpendiculară pe dreapta dată.

Cum construim o printr-un punct exterior unei drepte o dreaptă perpendiculară pe o dreaptă dată



Pasul 1: Așezăm echerul cu latura cea mai mică (o catetă) pe dreaptă, și cu cealaltă catetă să treacă prin punct.



Pasul 2: Trasăm dreapta ce trece prin punctul A de-a lungul catetei echerului.

Dreapta astfel obținută este perpendiculară pe dreapta dată.

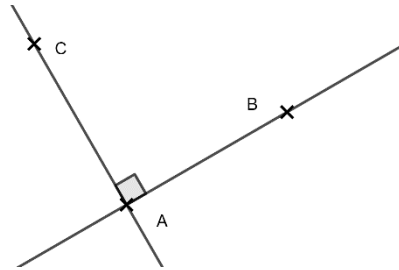
Distanța de la un punct la o dreaptă




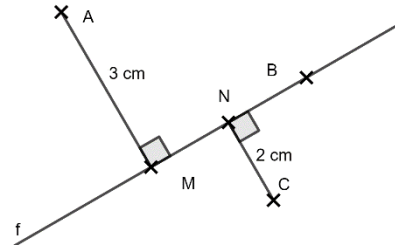
- ✓ Distanța de la punctul A la dreapta d este lungimea segmentului AM unde M este un punct pe dreapta d cu proprietatea $AM \perp d$.
- ✓ M se numește piciorul perpendicularei din A pe dreapta d .
- ✓ Notăm $d(A, d) = AM$.
- ✓ Dacă punctul A este pe dreapta d atunci distanța este 0. Scriem $d(A, d) = 0$.

Exemple:

 $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ deci $AB \perp AC$



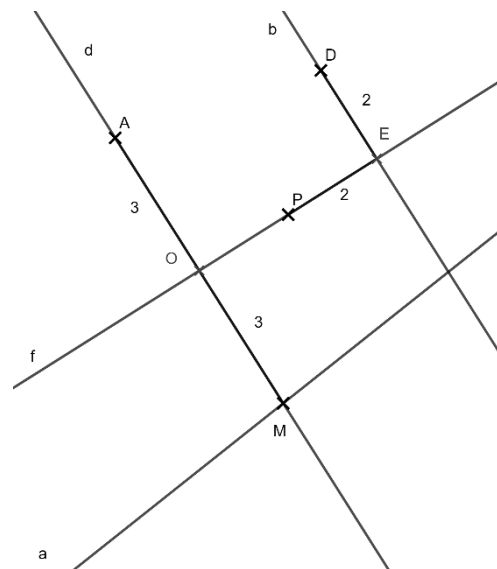
 $d(A, f) = AM = 3 \text{ cm}$.
 $d(C, f) = CN = 2 \text{ cm}$.



Să exersăm!

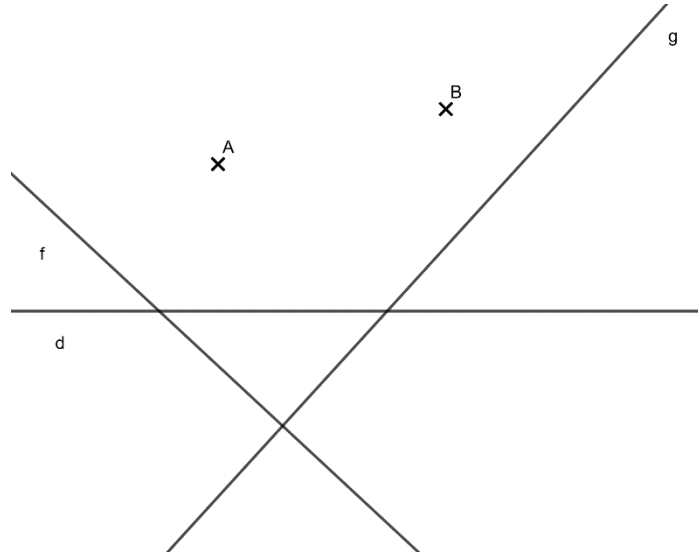
1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- | | | |
|--------------------|---|---|
| a) $f \perp d$ | A | F |
| b) $a \perp d$ | A | F |
| c) $b \perp a$ | A | F |
| d) $b \parallel d$ | A | F |
| e) $a \parallel f$ | A | F |
| f) $d(A, f) = AM$ | A | F |
| g) $d(M, f) = OM$ | A | F |
| h) $d(A, f) = AP$ | A | F |
| i) $d(P, b) = 2$ | A | F |
| j) $d(D, f) = DE$ | A | F |

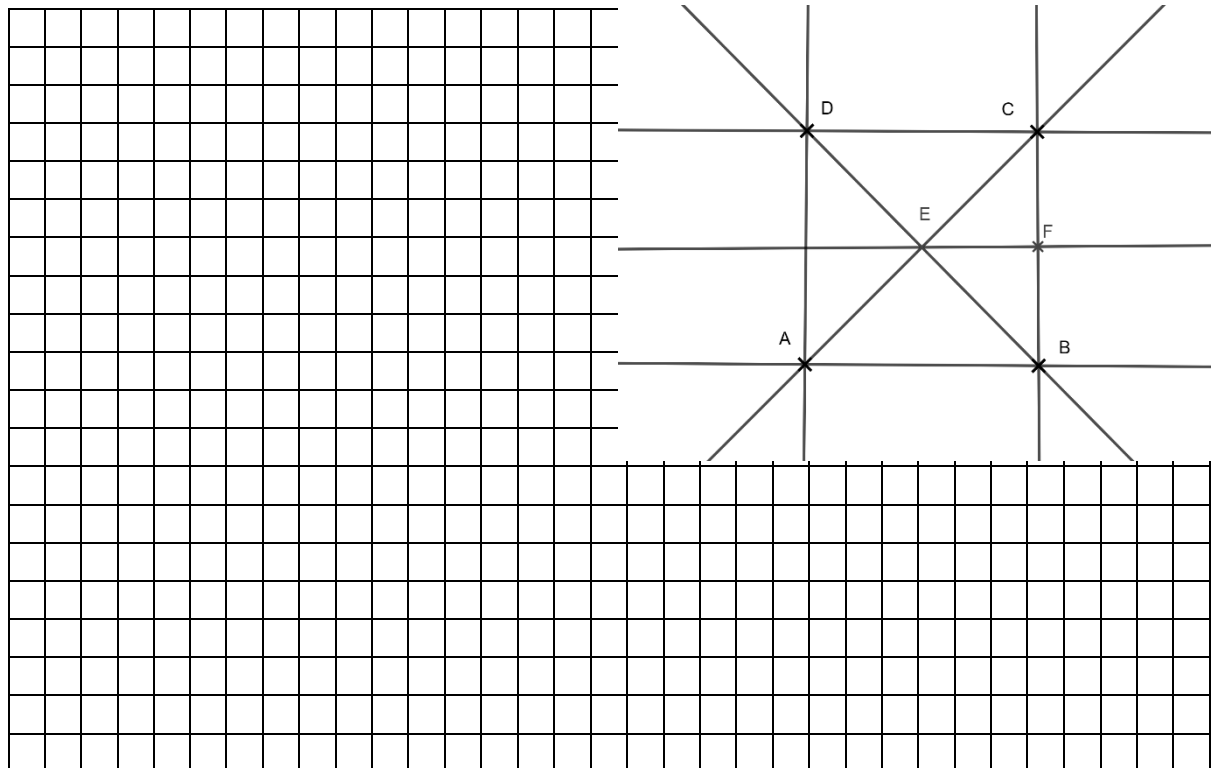


2. Completați desenul pentru ca următoarele afirmații să fie în același timp adevărate:

- $d(A, d) = AM$;
- $AP \perp d$, punctul P nu este situat pe dreapta d ;
- $BT \perp g$, punctul T este situat pe dreapta d ;
- $AH \perp f$, punctul F este situat pe dreapta f ;
- Dreptele d și f se intersectează în punctul N ;
- $d(A, g) = AG$.



3. Scrieți cât mai multe perechi de drepte perpendiculare pe care le identificați în figura de mai jos.

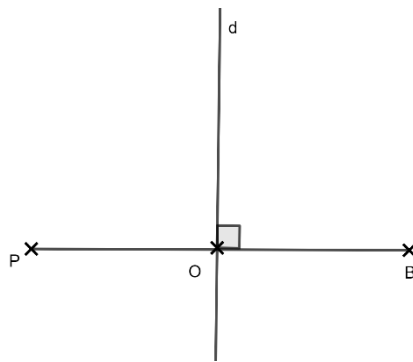


Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă

Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul acestuia.



Desenăm



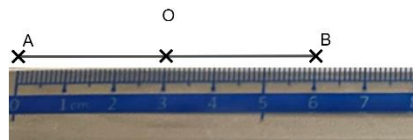
Citim

dreapta d este mediatoarea segmentului AB

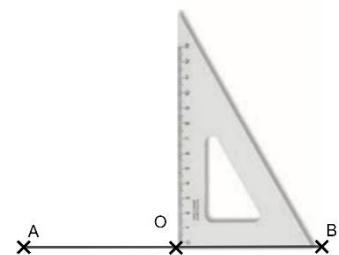


✓ Dacă un punct este situat pe mediatoarea unui segment, atunci el este situat la distanțe egale de capetele segmentului.

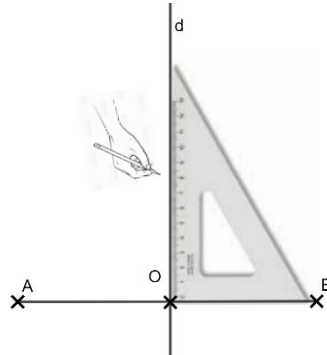
Cum construim mediatoarea unui segment



Pasul 1: *Determinăm, cu ajutorul riglei, punctul O , mijlocul segmentului AB .*





Pasul 2: *Așezăm echerul o catetă pe dreaptă și cu cealaltă catetă să treacă prin punctul O*





Pasul 3: *Trasăm dreapta d ce trece prin punctul O de-a lungul catetei echerului*

Exemple:

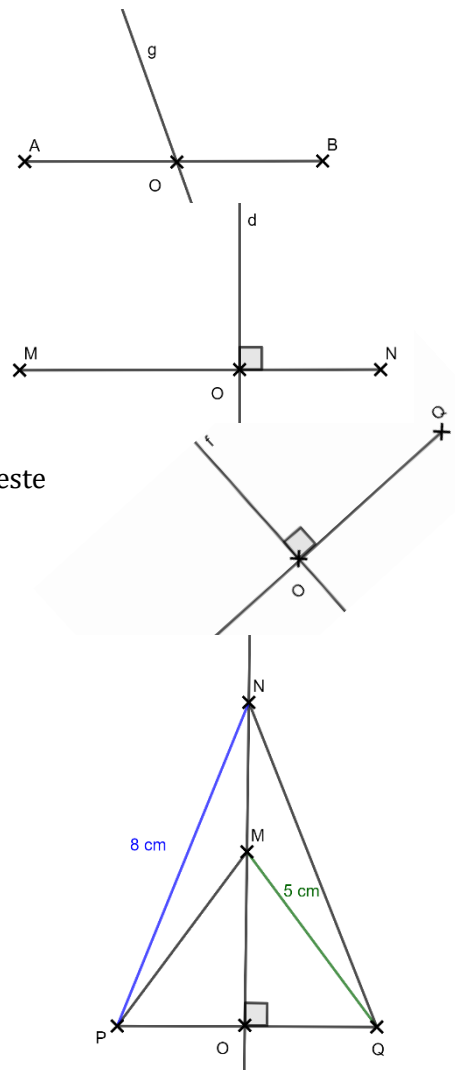
 g nu este mediatoarea segmentului AB deoarece g nu este perpendiculară pe AB.

 d nu este mediatoarea segmentului MN deoarece O nu este mijlocul segmentului AB.

 f este mediatoarea segmentului PQ deoarece $f \perp PQ$ și O este mijlocul segmentului PQ.

 Dacă MN este mediatoarea segmentului PQ și $MQ = 5 \text{ cm}$, iar $NP = 8 \text{ cm}$, determinați lungimea segmentelor MP și NQ.

- MN este mediatoarea segmentului PQ \Rightarrow
 $PM = MQ = 5 \text{ cm}$
- MN este mediatoarea segmentului PQ \Rightarrow
 $NQ = NP = 8 \text{ cm}$

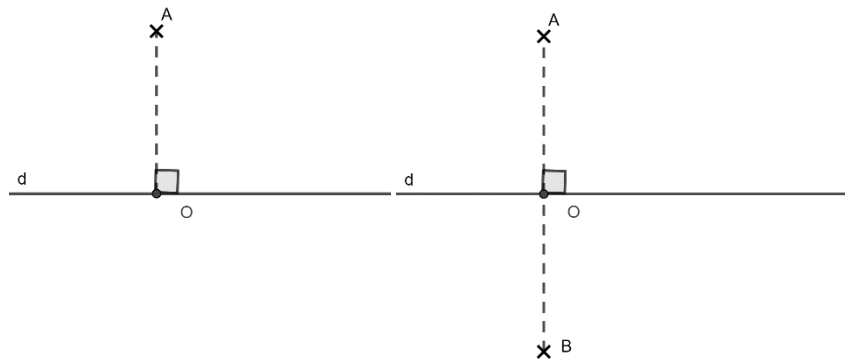


Simetria față de o dreaptă



Punctul B este *simetricul punctului A față de dreapta d* , dacă dreapta d este mediatoarea segmentului AB .

Cum construim simetricul unui punct față de o dreaptă





Pasul 1: *Trasăm perpendiculara din A pe dreapta d și notăm cu O intersecția cu dreapta d .* Pasul 2: *Prelungim segmentul AO cu segmentul congruent OB .*

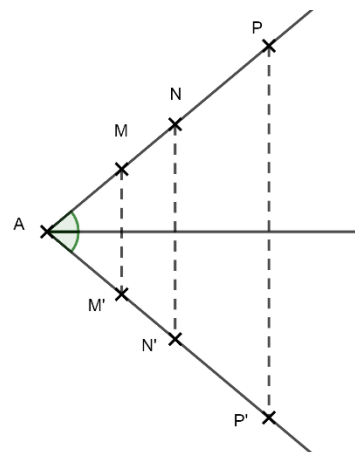
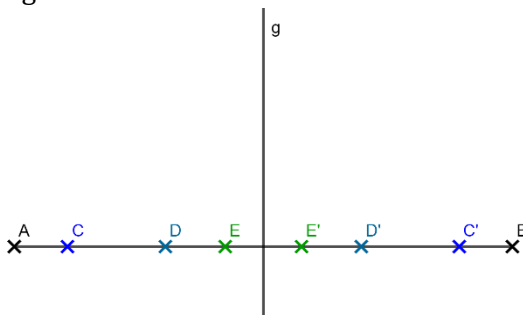
B reprezintă simetricul punctului A față de dreapta d .



- ✓ O dreaptă se numește *axă de simetrie* a unei figuri geometrice, dacă simetricul fiecărui punct al figurii aparține de asemenea figurii geometrice.
- ✓ Practic: Dacă decupă figura geometrică și îndoim decupajul de-a lungul axei de simetrie cele două părți se suprapun.

Exemple:

-  Axa de simetrie a unui unghi este bisectoarea unghiului.
-  Axa de simetrie a unui segment este mediatoarea segmentului.





UNIUNEA EUROPEANĂ



Instrumente Structurale
2014-2020

